第4章 多总体的统计检验

多总体的统计检验

多总体检验问题：

$$H_0: F_1 = \cdots = F_k \leftrightarrow H_1: F_i(x) = F(x+\theta_i), i = 1, \cdots, k$$

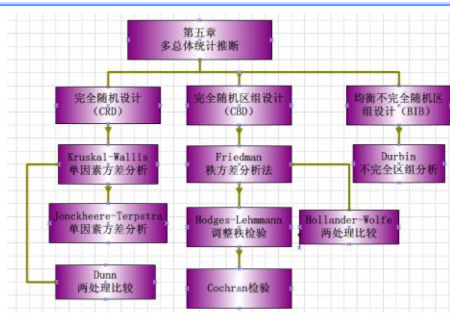
【例】确定超市的位置和竞争者的数量对销售额是否有显著影响，获得的年销售额数据(单位：万元)如下表

	A	B	C	D	E	F
1	因素		竞争者数量（B）			
2			0个	1个	2个	3个及以上
3	超市位置（A）	居民区	265	290	445	430
4			310	350	480	428
5			220	300	500	530
6		商业区	410	380	590	470
7			305	310	480	415
8			450	390	510	390
9		写字楼	180	220	290	246
10			290	170	283	275
11			330	256	260	320

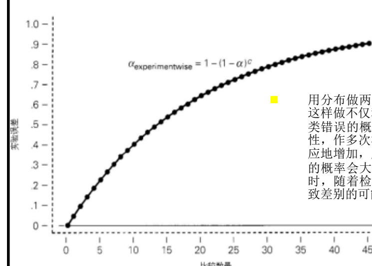
水平或处理

样本数据

本章内容



多样本检验和两样本检验之间的差异



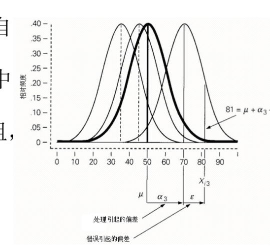
- 用分布做两两的比较，则需要做多次比较。这样做不仅程序繁琐，而且每次检验犯第I类错误的概率都会影响到整体的检验显著性，作多次检验会使犯第I类错误的概率相应地增加，所有检验完成时，犯第I类错误的概率会大于每个检验的显著性水平。同时，随着检验的次数的增加，偶然因素导致差别的可能性也会增加

方差分析

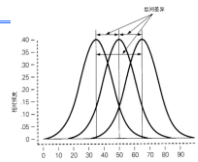
- 方差分析（analysis of variance，ANOVA）是分析定性自变量对因变量影响的一种方法。
- 自变量是定性变量，也称为因子或协变量（covariate）
- 分析结果是由一个方差分析表表示的。
- 原理为：因变量的值随着自变量的不同取值而变化。将这些变化按照自变量进行分解，使得每个自变量都包含一份贡献，不能分解的部分是随机误差的贡献。
- 将各自变量的贡献和随机误差的贡献进行比较（F检验），判断该自变量的不同水平是否对因变量的变化有显著贡献。输出就是F-值和检验的一些p-值。

几个术语

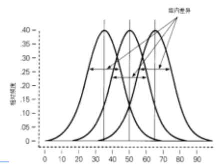
- 因子　　在分析中处于自变量的位置.
- 水平　　在一个自变量中的不同条件或数值.
- 总方差　不考虑实验分组，所有数据的方差。



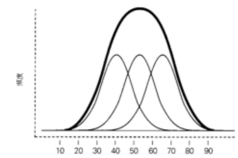
- 组间方差（Between-Groups Variance）



- 组内方差（Within-Groups Variance）



- 方差分析的作用是帮助我们分析方差是因误差产生的还是因处理产生的



方差分析的几种类型

1. 分析“超市位置”和“竞争者数量”对销售额的影响
2. 如果只分析超市位置或只分析竞争者数量一个因素对销售额的影响，则称为**单因素方差分析**(one-way analysis of variance)
3. 如果只分析超市位置和竞争者数量两个因素对销售额的单独影响，但不考虑它们对销售额的**交互效应**(interaction)，则称为只考虑主效应(main effect)的双因素方差分析，或称为无重复双因素分析(two-factor without replication)
4. 如果除了考虑超市位置和竞争者数量两个因素对销售额的单独影响外，还考虑二者对销售额的交互效应，则称为考虑交互效应的双因素方差分析，或称为可**重复双因素分析**(two-factor with replication)

方差分析的基本假定

1. 正态性(normality)。每个总体都应服从正态分布，即对于因素的每一个水平，其观测值是来自正态分布总体的简单随机样本
   - 例如，检验超市位置不同是否是影响到销售额的一个重要变量，要求每个位置超市的销售额必须服从正态分布
   - 检验总体是否服从正态分布的方法有很多，包括对样本数据作直方图、茎叶图、箱线图、正态概率图做描述性判断，也可以进行非参数检验等
2. 方差齐性(homogeneity variance)。各个总体的方差必须相同，对于分类变量的个水平，有$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\ldots=\sigma_k^2$
   - 例如，要求不同位置超市的销售额的方差都相同
3. 独立性(independence)。每个样本数据是来自因素各水平的独立样本

单因素方差分析举例

- **比较数据，*n*=19类产品，销售只与促销方式有关，用*p*=4种不同的广告方法进行一段时间后看销售是否受到广告的影响而不同？**
- **问题：四种方法是否不同？**

促销方法			
A	B	C	D
133.8	151.2	193.4	225.8
125.3	149.0	185.3	224.6
143.1	162.7	182.8	220.4
128.9	143.8	188.5	212.3
135.7	153.5	198.6	

均值A= 133.36　均值B= 152.04　均值C=189.72　均值D= 220.78

单因素方差分析的数据结构

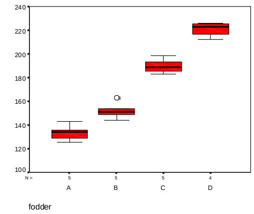
观察值（*j*）	因素(A) *i*			
	水平A_1	水平A_2	…	水平A_k
1	x_{11}	x_{21}	…	x_{k1}
2	x_{12}	x_{22}	…	x_{k2}
:	:	:	:	:
:	:	:	:	:
n	x_{1n1}	x_{2n2}	…	x_{knk}

单因素方差分析举例

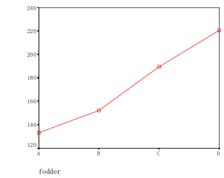
- **比较数据，n=19类产品，用p=4种不同的广告方法进行一段时间后看销售是否受到促销方式不同的影响？**
- **问题：四种方法是否不同？**

促销方法			
A	**B**	**C**	**D**
133.8	**151.2**	**193.4**	**225.8**
125.3	**149.0**	**185.3**	**224.6**
143.1	**162.7**	**182.8**	**220.4**
128.9	**143.8**	**188.5**	**212.3**
135.7	**153.5**	**198.6**	

四种方法的箱图



四种方法的均值图



线性模型：

$$y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1,\dots,p, \quad j = 1,\dots,n_i$$

o广义线性模型（**general linear model**），可被理解为：“任何个体得分是总体均值、处理效应和随机误差影响的总和。”

假设：

$$y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{in_i} \sim N(\mu_i, \sigma^2),\ i = 1,\dots,p$$

检验：H_0: $\mu_1 = \dots = \mu_p$

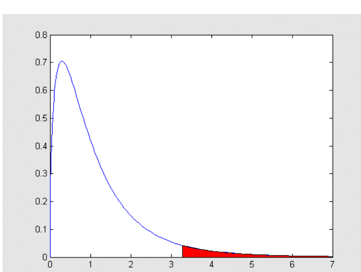
公式：总平方和=组间平方和+组内平方和

$$SST = SSB + SSE = \sum_{i=1}^{p} n_i(\bar{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \bar{y}_i)^2$$

其中，*SST* 有自由度 *n-1*，*SSB*有自由度 *p-1*，*SSE* 有自由度 *n-p*，在正态分布的假设下，如果各组增重均值相等(零假设)，则

$$F = \frac{MSB}{MSE} = \frac{SSB/(p-1)}{SSE/(n-p)}$$

有自由度为 *p-1* 和*n-p* 的*F* 分布.



方差分析表：

(比较一元总体的) ANOVA

	Sum of Squares(平方和)	Df 自由度	Mean Square(均方)	F	Sig.
Between Groups(处理)	SSB	P-1	MSB=SSB/(p-1)	F= MSB/MSE	P(F>F $_\alpha$)
Within Groups (误差)	SSE	n-p	MSE=SSE/(n-p)		
Total(总和)	SST	n-1			

这里n 为观测值数目p 为水平数，F_α满足$P(F>F_\alpha)=\alpha$. 这是自由度为$p-1$和$n-p$的F-分布的概率

Kruskal-Wallis单因素方差分析

基本原理：类似处理两个样本相关性位置检验的W-M-W方法类似，将多个样本混合起来求秩，如果遇到打结的情况，采用平均秩，然后再按样本组求秩和。

完全随机设计数据形态

	总体 1	总体 2	$\cdots$	总体 k
	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1k}
重	x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{2k}
复	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
	$x_{n_1 1}$	$x_{n_2 2}$	$\cdots$	$x_{n_k k}$

完全随机设计数据的秩

	总体 1	总体 2	$\cdots$	总体 k
	R_{11}	R_{12}	$\cdots$	R_{1k}
重	R_{21}	R_{22}	$\cdots$	R_{2k}
复	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
	$R_{n_1 1}$	$R_{n_2 2}$	$\cdots$	$R_{n_k k}$
秩和	$R_{.1}$	$R_{.2}$	$\cdots$	$R_{.k}$

检验方法

计算第j组的样本平均秩：

$$\bar{R}_{.j} = \frac{R_{.j}}{n_j} = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} R_{ij}}{n_j}$$

对秩仿照方差分析原理：得到Kruskal-Wallis的H统计量：

$$\begin{aligned} H &= SSt/MST = \frac{\sum R_{.j}^2/n_j - n(n+1)^2/4}{n(n+1)/12} \\ &= \frac{12}{n(n+1)} \sum R_{.j}^2/n_j - 3(n+1) \end{aligned}$$

在零假设情况下，H近似服从$\chi^2_{(k-1)}$，当$H > \chi^2_{\alpha,(k-1)}$的时候拒绝零假设。

教育年限在17年以上的工资水平差别大吗？硕士=博士吗？

变异源	平方和	自由度	均方	F值	P值
处理	619712167	2	309856083	2.8185	0.07732
误差	2968265250	27	109935750	—	—
合计	3587977417	29	—	—	—

自由度	卡方检验统计量值	P值
2	11.6989	0.002881

RECODE 定义筛选变量 → SELECT 选择分析数据 → GRAPH 箱线图观察差异

→ ANALYSIS 单因素方差分析 → Kruskal- Wallis 非参数检验确认差异

对比其中每两组差异

对比其中每两组差异的时候，用Dunn(1964)年提出用：

$$d_{ij} = |\bar{R}_i - \bar{R}_j| / SE$$

其中

$$SE = \sqrt{\frac{n(n+1)}{12}\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}$$

如果$|d_{ij}| \geq Z_{1-\alpha^*}$那么表示i和j两组之间存在差异，$\alpha^* = \alpha / k(k-1)$，Z 为标准正态分布分位数。

比较式	$\lvert\bar{R}_{.i} - \bar{R}_{.j}\rvert$	SE	d_{ij}	$Z_{0.9958}$
A VS B	13-4=9	4.506939	1.9969207	2.638
A VS C	$\lvert 13-16.7\rvert = 3.7$	3.809059	0.9713686	2.638
A VS D	$\lvert 13-14.7\rvert = 1.7$	3.974747	0.4277002	2.638
B VS C	$\lvert 4-16.7\rvert = 12.7$	4.612999	2.7530896*	2.638
B VS D	$\lvert 4-14.7\rvert = 10.7$	4.750731	2.2522850	2.638
C VS D	$\lvert 14.7-16.7\rvert$=2	4.094615	0.4884464	2.638

由上表四种疗效比较结果，仅 B 与 C 有显著性差别外，其他疗效之间都不存在显著性差异。这也说明主要的差异在 B 与 C，这与直观比较吻合。

例 5.1: 为研究 4 种不同的药物对儿童咳嗽的治疗效果，将 25 个体质相似的病人随机分为 4 组，各组人数分别为 8 人， 4 人， 7 人和 6 人，各自采用 A, B, C, D 四种药进行治疗，假定其他条件均保持相同， 5 天后测量每个病人每天的咳嗽次数如下表：（单位：次数），试比较这 4 种药物的治疗效果是否相同？

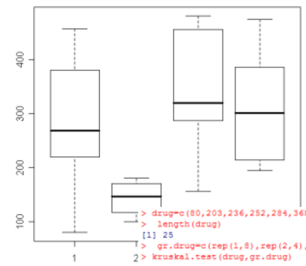
表 5.3. 4 种药物治疗效果比较表

	A	秩	B	秩	C	秩	D	秩
	80	1	133	3	156	4	194	7
	203	8	180	6	295	15	214	9
重	236	10	100	2	320	16	272	12
	252	11	160	5	448	21	330	17
	284	14			465	23	386	19
复	368	18			481	25	475	24
	457	22			279	13		
	393	20						
处理内秩和 $R_{.j}$		104		16		117		88
处理内平均秩 $\bar{R}_{.j}$		13		4		16.7		14.7

统计分析：由 (5.2) 式

$$H = \frac{12}{25(25+1)}\left[\frac{104^2}{8}+\frac{16^2}{4}+\frac{117^2}{7}+\frac{88^2}{6}\right]-3(25+1) = 8.072088$$

结论： $H = 8.072088 > \chi^2_{0.05,3} = 7.814728$，故接受 H_1，显示四种药物疗效不等。




```
> drug=c(80,203,236,252,284,368,457,393,133,180,100,160,156,295,320,448,4
>  length(drug)
[1] 25
>  gr.drug=c(rep(1,8),rep(2,4),rep(3,7),rep(4,6))
> kruskal.test(drug,gr.drug)

        Kruskal-Wallis rank sum test

data:  drug and gr.drug
Kruskal-Wallis chi-squared = 8.0721, df = 3, p-value = 0.04455

>
```


区组设计数据回顾

- 在有区组的数据中,总的变化可以分解到以下几个方面:
  - 处理造成的不同
  - 区组内的变化
  - 区组之间的变化
- 当有区组存在时, 代表处理的样本的独立性就不存在了.

Friedman秩方差分析

假设检验问题:

$$H_0: \theta_1 = \cdots = \theta_k : H_1: \exists i, j \in 1, \cdots, k, \theta_i \neq \theta_j$$

完全随机区组设计表

	样本1	样本2	…	样本k
区组1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1k}
区组2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2k}
…	…	…	…	…
区组b	x_{b1}	x_{b2}	…	x_{bk}

在同一区组内，计算样本的秩, 并求出：

$$R_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{b} R_{ij},\ j = 1, \ldots, k \qquad \bar{R}_{\cdot j} = \frac{R_{\cdot j}}{b}$$

	样本1	样本2	…	样本k
区组1	R_{11}	R_{12}	…	R_{1k}
区组2	R_{21}	R_{22}	…	R_{2k}
…	…	…	…	…
区组b	R_{b1}	R_{b2}	…	R_{bk}
秩和	R_{g1}	R_{g2}	…	R_{gk}

$$Q = \frac{\sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{k}(R_{\cdot j}-\bar{R}_{\cdot j})^2}{\mathbf{var}(R_{\cdot j})}k/(k-1)$$

$$\bar{R}_{\cdot j} = \sum_{j=1}^{k} R_{\cdot j}/k = \frac{(k+1)b}{2}$$

$$\mathrm{var}(R_{\cdot j}) = \sum_{i=1}^{b} \mathrm{var} R_{ij} = b\frac{k^2-1}{12}$$

检验统计量

利用普通类似方差分析构造统计量：

$$Q=\frac{12}{bk(k+1)}\sum R_{.j}^2-3b(k+1)$$

在零假设成立下$Q\sim\chi^2_{(k-1)}$，如果 Q 偏大，那么就考虑拒绝原价设。如果存在打结的情况，则可采用修正公式计算。

$$Q=\frac{Q}{1-C},C=\frac{\sum_{i,j}\tau_{ij}^3-\tau_{ij}}{bk(k^2-1)}$$

中国人民大学统计学院

例5.5

例 5.5: 设有来自 A,B,C,D 四个地区的四名厨师制作名菜京城水煮鱼，想比较它们的品质是否相同，经四位美食评委评分结果如下表，试测验四个地区制作的水煮鱼这道菜品质有无区别。

表 5.10. 评委对四名厨师的评分数据表

美食评委	地区 A	B	C	D	
1	85(4)	82(2.5)	82(2.5)	79(1)	
2	87(4)	75(1)	86(3)	82(2)	
3	90(4)	81(3)	80(2)	76(1)	
4	80(3)	75(1.5)	81(4)	75(1.5)	
秩和 $R_{.j}$	15	8	11.5	5.5	$R_{..}=40$

上表中括号内数据为每位评委品尝四种菜后所给评分的秩。

中国人民大学统计学院

统计分析：$b=4$（区组数），$k=4$（处理数）

表 5.11. 结点校正计算表

相同的秩	1.5	2.5	
τ_i	2	2	
$\tau_i^3-\tau_i$	6	6	$\sum(\tau_i^3-\tau_i)=12$

$$\begin{aligned}Q &= \frac{12}{4\times4\times(4+1)}[15^2+8^2+11.5^2+5,5^2]-3\times4(4+1)\\ &= 7.7250\\ Q_c &= 8.1316\end{aligned}$$

结论：实际测量 $Q_c=8.1316>\chi^2_{0.05,3}=7.82$，接受 H_1，认为四个地区的菜品质上存在显著差异。

中国人民大学统计学院

```
> BeijingFish
  [1] 85 82 82 79 87 75 86 82 90 81 80 76 80 75 81 75
> treat.BF
  [1] 1 2 3 4 1 2 3 4 1 2 3 4 1 2 3 4
> block.BF
  [1] 1 1 1 1 2 2 2 2 3 3 3 3 4 4 4 4
> friedman.test(BeijingFish, treat.BF, block.BF)
  Friedman rank sum test
  data:  BeijingFish and treat.BF and block.BF
  Friedman chi-square = 8.1316, df = 3, p-value = 0.0434
  alternative hypothesis: two.sided
```

中国人民大学统计学院

Hollander-Wolfe两处理比较检验

当用Friedman秩方差分析，检验出认为处理之间表现出差异的时候，那么可以进一步研究处理两两之间是否存在差异。Hollander-Wolfe检验公式：

$$D_{ij}=|R_{.i}-R_{.j}|/SE$$

其中$SE=\sqrt{bk(k+1)/6}$，在打结的情况下可使用修正的公式。当 $|D_{ij}|\geq Z_{1-\alpha^*}$ 时认为两个处理之间存在差异，其中 $\alpha^*=\alpha/k(k-1)$，α 是显著性水平。

中国人民大学统计学院

例5.6

例 5.6: 由例 5.5 知，四个地区所制的水煮鱼品质上有显著差异，成对样本比较有 $k(k-1)/2=4(4-1)/2=6$ 种，四种水煮鱼的秩和分别为

$$R_{.1}=15,\quad R_{.2}=8,\quad R_{.3}=11.5,\quad R_{.4}=5.5$$

设 $\alpha\ =\ 0.10,\quad \alpha^*=0.10/4(4-1)=0.0167$

$Z_{1-0.0167}\ =\ Z_{0.9833}=2.13$

$$SE=\sqrt{\frac{4\times4(4+1)}{6}-\frac{4\times12}{6(4-1)}}=3.266$$

表 5.12. 两两处理的 Hollander-Wolfe 计算表

比较式	$\lvert R_i-R_j\rvert$	SE	D_{ij}	$Z_{0.9833}$
A VS B	15-8=7	3.266	2.1433*	2.13
A VS C	15-11.5=3.5	3.266	1.0716	2.13
A VS D	15-5.5=9.5	3.266	2.9088*	2.13
B VS C	8-11.5=3.5	3.266	1.0716	2.13
B VS D	8-5.5=2.5	3.266	0.7655	2.13
C VS D	11.5-5.5=6	3.266	1.8371	2.13

中国人民大学统计学院

Cochran检验

检验原理以及计算：

当完全区组设计，并且观测只是二元定性数据时，Cochran Q检验方法进行处理。数据形式见下表。其中 $O_{ij} \in \{0,1\}$

		处理				和
		1	2	$\cdots$	k	
区	1	O_{11}	O_{12}	$\cdots$	O_{1k}	$n_{1.}$
	2	O_{21}	O_{22}	$\cdots$	O_{2k}	$n_{2.}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
组	b	O_{b1}	O_{b2}	$\cdots$	O_{bk}	$n_{b.}$
	和	$n_{.1}$	$n_{.2}$	$\cdots$	$n_{.k}$	N

$$\mathrm{E}(n_{.j}) = \frac{1}{k}\sum n_{.j} = \frac{N}{k}$$

当 H_0 成立时，每一区组 i 内的成功概率 p_{ij} 相等，对 $\forall j = 1, \cdots, k, \forall i, p_{i1} = p_{i2} = \cdots = p_{ik} = p_{i.}$， n_{ij} 服从两点分布 $b(1, p_{i.})$，

$\mathrm{Var}(n_{.j})$ 为 $n_{.j}$ 的方差

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(n_{.j}) &= \mathrm{Var}(\sum_{i=1}^{b} n_{ij}) \\
&= \sum_{i=1}^{b} \mathrm{Var}(n_{ij}) \\
&= \sum_{i=1}^{b} \hat{p}_{ij}(1-\hat{p}_{ij})
\end{aligned}$$

将 $\hat{p}_{ij} = \hat{p}_{i.} = n_{i.} \cdot \frac{1}{k}$ 代入上式，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(n_{.j}) &= \sum_{i=1}^{b} n_{i.}\frac{1}{k}(1 - n_{i.}\frac{1}{k}) \\
&= \frac{1}{k^2}\sum_{i=1}^{b}(kn_{i.} - n_{i.}^2)
\end{aligned}$$

上式的估算值一般都很小，因而用 $k/(k-1)$ 修正如下式

$$\mathrm{Var}(n_{ij}) = \frac{n_{i.}(k-n_{i.})}{k(k-1)}$$

将 (5.21) 式代入 (5.19) 式，得到估计为：

$$\mathrm{Var}(n_{.j}) = \sum n_{i.}(k-n_{i.})/k(k-1)$$

在大样本情况下， $n_{.j}$ 为近似正态分布，即：

$$\frac{n_{.j} - \mathrm{E}(n_{.j})}{\sqrt{\mathrm{Var}(n_{.j})}}$$

检验

假设检验问题：

H_0：k个总体分布相同 $\leftrightarrow$ H_1：k个总体分布不同

Cochran Q检验统计量：

$$Q = \frac{k(k-1)\sum_{j=1}^{k}(n_{.j} - \bar{n}_{.j})^2}{k\sum_{j=1}^{b} n_{i.} - \sum_{j=1}^{b} n_{i.}^2}$$

$$Q = \frac{(k-1)[\sum n_{.j}^2 - (\sum n_{.j})^2/k]}{\sum n_{i.} - \sum n_{i.}^2/k}$$

Q近似服从$\chi^2_{(k-1)}$分布，当Q值偏大时，考虑拒绝零假设。

例 5.8: 设有 A,B,C 三种榨汁机分给 10 位家庭主妇使用，用以比较三种榨汁机受喜爱程度是否相同。对于喜欢的品牌给 1 分，否则给 0 分，调查结果如下表：

表 5.17. 家庭主妇对三种榨汁机喜爱与否统计表

		主妇										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	和 $n_{.j}$
榨汁机	A	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	2
	B	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	6
	C	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	9
	$n_{i.}$	2	2	1	3	1	2	1	1	2	2	17

假设检验：

H_0 ： 三种榨汁机受喜爱程度相同

H_1 ： 三种榨汁机受喜爱程度不同

统计分析：由于各主妇每人饮食和做家务的习惯不同，对各榨汁机的功能使用情况也有差异，故应以主妇为区组，

$$\begin{aligned}
\sum n_{.j} &= \sum R_j = 17, k = 3 \\
\sum n_{i.}^2 &= 2^2 + 2^2 + \cdots + 2^2 = 33 \\
\sum n_{.j}^2 &= 2^2 + 6^2 + 9^2 = 121 \\
Q &= \frac{(3-1)(121 - 17^2/3)}{17 - 33/3} = \frac{49.3333}{6} \\
&= 8.2222
\end{aligned}$$

结论：现在实际测得 $Q = 8.2222 > \chi^2_{0.05,2} = 5.991$ ，接受 H_1 ，表示三种榨汁机受喜爱程度不同，以 C 榨汁机较受欢迎。实际上，从三种榨汁机受喜爱的概率点估计 $(\hat{p}_{.,1} = 0.12, \hat{p}_{.,2} = 0.35, \hat{p}_{.,3} = 0.53)$ 也支持了这一论断。

Durbin不完全区组分析

原理：

可能存在处理非常多，但是每个区组中允许的样本量有限的时候，每一个区组中不可能包含所有的处理，比如重要的均衡不完全区组BIB设计。Durbin检验便是针对这种问题。

X_{ij}表示第j个处理第i个区组中的观测值，R_{ij} 为在第i个区组中第j个处理的秩，计算：

$$R_{j}=\sum_{i} R_{ij},\ j=1,\ldots,b$$

BIB设计

以上介绍的完全随机区组设计要求每一个处理都出现在每一个区组中，但在实际问题中，不一定能够保证每一个区组都能有对应的样本出现。此时

1. 每个处理在同一区组中最多出现一次；
2. 区组样本量为 t 小于区组个数 k；
3. 每个处理出现在相同多的 r 个区组中；
4. 每个处理相遇的区组数一样 (λ 次).

1. $kr = bt$;
2. $\lambda(k-1) = r(t-1)$;
3. $b \geq k$ 或 $r \geq t$. 如果 $t = k, r = b$, 则为完全区组设计.

表 2.8. 不同城市保险公司的绩效的 BIB 设计

	城市	(区组)		
保险公司 (处理)	I	II	III	IV
A	34	28		59
B		30	36	45
C	36	44	48	
D	40		54	60

很容易看出 BIB 设计的均衡性质. 这里 $(k,b,r,t,\lambda)=(4,4,3,3,2)$.

当H_0成立时，

$$ER_{\cdot j}=\sum\sum R_{ij}=\frac{r(t+1)}{2}$$

构造统计量：

$$D=\frac{12(k-1)}{rk(t^2-1)}\sum_{j=1}^{k}\left[R_{\cdot j}-\frac{r(t+1)}{2}\right]$$

$$=\frac{12(k-1)}{rk(t^2-1)}\sum_{j=1}^{k}R_{\cdot j}^{2}-\frac{3r(k-1)(t+1)}{t-1}$$

当D值较大的时候，可以考虑拒绝零假设，认为处理之间存在差异。在零假设成立时，大样本情况下，D近似服从分布 $\chi^2_{(k-1)}$ 打结的时候，只要长度不大，对结果影响不太大。

例5.9

例 5.9: 设需要对四种饲料（处理）的养猪效果进行试验，用以比较饲料的质量. 选 4 胎母猪所生的小猪进行试验，每头所生的小猪体重相当者 3 头. 3 个月后测量所有小猪增加的体重（磅）如下，试比较四种饲料品质有无差别.

表 5.18. 四种饲料的养猪效果数据表

		区组（胎别）				
		I	II	III	IV	和 $n_{\cdot j}$
	A	73(1)	74(1)	-	71(1)	3
饲	B	-	75(2.5)	67(1)	72(2)	5.5
料	C	74(2)	75(2.5)	68(2)	-	6.5
	D	75(3)	-	72(3)	75(3)	9

括号内的数为各区组内按 4 处理观测值大小分配的秩.

解答

解: 假设检验问题:

$$H_0:\ \text{四种饲料质量相同}$$
$$H_1:\ \text{四种饲料质量不同}$$

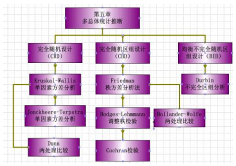
统计分析: 由 (5.4) 式, $t=4$, $k=3$, $r=3$, $v=4-1=3$

$$\begin{aligned}Q &= \frac{12(4-1)}{3\times4(3+1)(3-1)}(3^2+5.5^2+6.5^2+9^2)\\ &\quad -\frac{3\times3(4-1)(3+1)}{3-1}\\ &= 60.9375-54\\ &= 6.9375\end{aligned}$$

结论: 实测 $Q=6.9375<\chi^2_{0.05,3}=7.82$，不拒绝 H_0，没有明显迹象表明四种饲料质量之间存在差异.

本章要求

- 掌握Kruskal-Wallis单因素方差分析的基本原理
- 掌握完全随机区组设计下Friedman的基本原理
- 掌握完全随机设计下两处理之间的比较
- 掌握完全随机区组设计下两两处理之间的比较*
- 掌握BIB设计下Durbin比较
- 了解调整秩的概念及用法*
- 熟练R中对如上方法的运用和相应的数据变换



中国人民大学统计学院