# 第二章　完全信息静态博弈

一、博弈的标准式和纳什均衡

二、混合策略和纳什均衡的存在性

三、二人零和博弈

四、应用举例

## 一、博弈的标准式和纳什均衡

1、博弈的标准式表述

2、重复剔除严格劣战略

3、纳什均衡

## 1、博弈的标准式表述

标准式的三要素

(1) 参与人(或称为博弈方)

(2) 每个参与人可选择的战略集

(3) 收益：针对所有参与人可选择的战略组合，每一个参与人获得的收益

## 1、博弈的标准式表述

举例：囚徒困境（用双变量矩阵来描述）

双变量矩阵可由任意多的行和列组成，“双变量”指的是在两个博弈方的博弈中，每一个单元格有两个数字，分别表示两个参与者的收益。

| | | 囚徒2 | |
|---|---|---|---|
| | | 坦 白 | 不坦白 |
| 囚徒1 | 坦 白 | -5，-5 | 0，-8 |
| | 不坦白 | -8，0 | -1，-1 |

横行代表囚徒1的收益，在两个数字中放在前面；列行代表囚徒2的收益，在两个数字中放在后面。

## 一、博弈的标准式表述

举例：齐王田忌赛马

| | | 田忌 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 上中下 | 上下中 | 中上下 | 中下上 | 下上中 | 下中上 |
| 齐王 | 上中下 | 3，-3 | 1，-1 | 1，-1 | 1，-1 | -1，1 | 1，-1 |
| | 上下中 | 1，-1 | 3，-3 | 1，-1 | 1，-1 | 1，-1 | -1，1 |
| | 中上下 | 1，-1 | -1，1 | 3，-3 | 1，-1 | 1，-1 | 1，-1 |
| | 中下上 | -1，1 | 1，-1 | 1，-1 | 3，-3 | 1，-1 | 1，-1 |
| | 下上中 | 1，-1 | 1，-1 | 1，-1 | -1，1 | 3，-3 | 1，-1 |
| | 下中上 | 1，-1 | 1，-1 | -1，1 | 1，-1 | 1，-1 | 3，-3 |

注：

① 同时选择战略，不意味着行动必须是同时的；

②标准式不仅可用来描述静态博弈，也可以用来描述序贯行动的动态博弈，只不过在分析问题时，扩展式博弈更常用。

## 1、博弈的标准式表述

博弈的数学表述

假设一个博弈有n个博弈方，博弈方i的策略集(又称策略空间)为$S_i$(i=1, 2, ..., n)，用$s_{ij}\in S_i$表示博弈方i的第j个策略；若$s_i\in S_i$(i=1, 2, ..., n)，称$s=(s_1, s_2, \dots, s_n)$为一个策略组合；若用$s_{-i}=(s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$，则 $s=(s_i, s_{-i})$。

11:53:31　　6

## 一、博弈的标准式表述

用$u_i(s)=u_i(s_1, s_2, \dots, s_n)$（i=1, 2, ..., n）表示博弈方i 在策略组合$s=(s_1, s_2, \dots, s_n)$的得益，$u_i$是策略集$S_1\times S_2\times\dots\times S_n$上的多元函数。

★定义：若一个N人博弈的策略空间为$S_i$，得益函数为：$u_i(s)=u_i(s_1, s_2, \dots, s_n)$（i=1, 2, ..., n），则该博弈表示为：$G=\{N, S_1, S_2, \dots, S_n; u_1, u_2, \dots, u_n\}$。



## 2、重复剔除严格劣战略

(1)、占优均衡

如果一个博弈的某个策略组合中的所有策略都是各个博弈方各自的上策，那么这个策略组合肯定是所有博弈方都愿意选择的，必然是该博弈比较稳定的结果。我们称这样的策略组合为该博弈的一个"占优均衡"（Dominant-strategy Equilibrium）。

- 占优均衡是博弈分析中最基本的均衡概念之一，占优均衡分析是最基本的博弈分析方法。
- 囚徒的困境博弈中的（坦白，坦白）实际上就是一个占优均衡。

## 2、重复剔除严格劣战略

(2)、占优均衡分析的局限性

- 并非每个博弈方都有这种绝对偏好的上策，而且常常是所有博弈方都没有上策，因为博弈方的最优策略随其他博弈方的策略而变化正是博弈问题的根本特征，是博弈关系相互依存性的主要表现形式。
- 因此占优均衡不是普遍存在的。
- 例如赛马博弈就没有占优均衡，因为各个博弈方的任何策略都不是绝对最优的，每个博弈方都没有绝对偏好的上策。所以，占优均衡并不能解决所有的博弈问题，最多只是在分析少数博弈时有效。

## 2、重复剔除严格劣战略

(3)、重复剔除严格劣战略

- ①、思路和原理
- 反思占优均衡分析的思路，不难发现占优均衡分析采用的决策思路是一种选择法的思路，是在所有可选择策略中选出最好一种。
- 剔除法与选择法在思路上正好相反，它是通过对可选策略的相互比较，把不可能采用的较差策略排除掉，从而筛选出较好的策略，或者至少缩小侯选策略的范围。这种剔除法的思路导出了博弈分析中的重复剔除严格劣战略法（Iterated Elimination of Strictly Dominated Strategies）。

## 2、重复剔除严格劣战略

- 定义

一般地，如果在一个博弈中，不管其他博弈方的策略如何变化，一个博弈方的某种策略给他带来的得益，总是比另一种策略给他带来的得益要小，那么我们称前一种策略为相对于后一种策略的一个"严格劣策略"。

## 2、重复剔除严格劣战略

- ②举例

为了说明重复剔除严格劣策略法与占优均衡分析的区别，我们用一个例子来说明。首先看下图中这个抽象掉现实问题内容的，两个博弈方分别有三种和两种策略的不对称博弈问题。

博弈方2

| 博弈方1 | 左 | 中 | 右 |
| --- | --- | --- | --- |
| 上 | 1, 0 | 1, 3 | 0, 1 |
| 下 | 0, 4 | 0, 2 | 2, 0 |

博弈方2

| 博弈方1 | 左 | 中 |
| --- | --- | --- |
| 上 | 1, 0 | 1, 3 |
| 下 | 0, 4 | 0, 2 |

博弈方2

| 博弈方1 | 左 | 中 |
| --- | --- | --- |
| 上 | 1, 0 | 1, 3 |

博弈方2

| | 中 |
| --- | --- |
| 上 | 1, 3 |

## 2、重复剔除严格劣战略

③重复剔除严格劣策略法的缺陷

- 重复剔除严格劣策略也不能解决所有博弈的分析问题。因为在许多博弈问题中，上述相对意义上的严格劣策略往往不存在。如猜硬币、齐威王田忌赛马、石头，剪子，布等赌胜博弈，没有任何博弈方的任何策略是相对其他策略的严格劣策略。
- 此外，在策略数较多的博弈中，重复剔除严格劣策略法只能消去其中的部分策略，不能消去的策略组合并不惟一，因此仍然不能完全解决这些博弈问题。

## 2、重复剔除严格劣战略

(4)、划线法

①思想

在具有策略和利益相互依存性的博弈问题中，各个博弈方的收益既取决于自己选择的策略，还与其他博弈方选择的策略有关，因此博弈方在决策时必须考虑其他博弈方的存在和策略选择。

根据这种思想，科学的决策思路应该是：先找出自己针对其他博弈方每种策略的最佳对策，即自己的可选策略中与其他博弈方的策略配合，给自己带来最大收益的策略（这种相对最佳对策总是存在的，不过不一定惟一），然后在此基础上，通过对其他博弈方策略选择的判断，包括对其他博弈方对自己策略判断的判断等，预测博弈的可能结果和确定自己的最优策略。

## 2、重复剔除严格劣战略

②举例

例1

| | | 博弈方2 | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 左 | 中 | 右 |
| 博弈方1 | 上 | 1, 0 | 1, 3 | 0, 1 |
| | 下 | 0, 4 | 0, 2 | 2, 0 |

## 2、重复剔除严格劣战略

例2

| | | 囚徒2 | |
|---|---|---|---|
| | | 坦 白 | 不坦白 |
| 囚徒1 | 坦 白 | -5, -5 | 0, -8 |
| | 不坦白 | -8, 0 | -1, -1 |

划线法分析囚徒困境

## 2、重复剔除严格劣战略

- 划线法是一种非常简便的博弈分析方法，由于它以策略之间的相对优劣关系为基础，因此在分析用收益矩阵表示的博弈问题时具有普遍适用性。
- 当然，这并不意味着每个用收益矩阵表示的博弈都可以用划线法求出确定性的博弈结果。
- 事实上，许多博弈根本不存在确定性的结果，当然也就无法用划线法找出这种结果。我们通过一些例子来说明。

## 2、重复剔除严格劣战略

例3、猜硬币博弈

| | | 猜硬币方 | |
|---|---|---|---|
| | | 正面 | 反面 |
| 盖硬币方 | 正面 | -1, 1 | 1, -1 |
| | 反面 | 1, -1 | -1, 1 |

## 2、重复剔除严格劣战略

**例4、夫妻博弈**

| | | 丈夫 | |
|---|---|---|---|
| | | 时装 | 足球 |
| 妻子 | 时装 | 2，1 | 0，0 |
| | 足球 | 0，0 | 1，3 |

划线法分析夫妻之争

## 3、纳什均衡

- 通过划线法找出的具有稳定性的策略组合，不管是否惟一，都有一个共同的特性，即其中每个博弈方的策略都是针对其他博弈方策略或策略组合的最佳对策。
- 在两人博弈的情况下，就是“给定你的策略,我的策略是我最好的策略；给定我的策略，你的策略也是你最好的策略”。事实上，具有这种性质的策略组合，正是非合作博弈理论中最重要的一个解概念，即博弈中的“纳什均衡”（Nash Equilibrium）。

## 3、纳什均衡

### ①、纳什均衡的定义

▪在博弈 $G=\{S_1,\cdots S_n;u_1,\cdots u_n\}$ 中，如果由各个博弈方的各一个策略组成的某个策略组合 $(s_i^*,\cdots s_n^*)$ 中，任一博弈方$i$的策略 $s_i^*$，都是对其余博弈方策略的组合 $(s_1^*,\cdots s_{i-1}^*,s_{i+1}^*,\dots s_n^*)$ 的最佳对策，也即 $u_i(s_1^*,\cdots s_{i-1}^*,s_i^*,s_{i+1}^*,\dots s_n^*)\geq u_i(s_1^*,\cdots s_{i-1}^*,s_{ij},s_{i+1}^*,\dots s_n^*)$ 对任意 $s_{ij}\in S_i$ 都成立，则称 $(s_i^*,\cdots s_n^*)$为 $G=\{S_1,\cdots S_n;u_1,\cdots u_n\}$ 的一个纳什均衡。

**也称之为纯策略纳什均衡（Pure-strategy Nash Equilibrium, PNE）**

## 3、纳什均衡

### ②、纳什均衡的一致预测性

★**一致预测性**是指这样一种性质：如果所有博弈方都预测一个特定的博弈结果会出现，那么所有的博弈方都不会利用该预测或者这种预测能力，选择与预测结果不一致的策略，即没有哪个博弈方有偏离这个预测结果的愿望，因此这个预测结果最终真会成为博弈的结果。

即：如果所有博弈方都预测一个特定的纳什均衡会出现，那么，没有人有兴趣作不同的选择。

★一致预测性是纳什均衡的本质属性。

★一致预测性使纳什均衡是稳定的和自我强制的。



## 3、纳什均衡

### ③、纳什均衡与重复剔除严格劣策略

- 占优均衡和纳什均衡之间的关系是：占优均衡是包含在纳什均衡范围之内的，占优均衡肯定是纳什均衡，但纳什均衡不一定是占优均衡。
- 划线法与纳什均衡的关系更清楚，前两者正是在可以用得益矩阵表示的博弈中寻找纳什均衡的方法。
- 纳什均衡和重复剔除严格劣策略法之间的关系要复杂一些，关键是这两者之间是否存在相容性，也即重复剔除严格劣策略法是否会消去纳什均衡？对于纳什均衡和重复剔除严格劣策略法的关系，下面的两个定理给出了答案。

## 3、纳什均衡

★**定理1**：在n个博弈方的博弈$G=\{S_1, S_2, \cdots, S_n;$ $u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ 中，如果$s^*=(s_1^*, s_2^*, \cdots, s_n^*)$是G的一个纳什均衡，那么重复剔除严格劣策略法一定不会将它消去。

★**定理2**：在n 个博弈方的博弈G中，如果重复剔除严格劣策略法排除了除$s^*=(s_1^*, s_2^*, \cdots, s_n^*)$之外的所有策略组合，那么$s^*$一定是该博弈惟一的纳什均衡。

## 二、混合策略和纳什均衡的存在性

- 前面介绍的纳什均衡分析方法可以相当圆满地解决许多博弈问题。但如果博弈中不存在纳什均衡或者纳什均衡不惟一，如猜硬币、齐威王田忌赛马或夫妻之争博弈那样，那么前述纳什均衡分析就无法对博弈方的选择和博弈结果作明确的预测，无法给博弈方提供明确的建议。
- 因此到目前为止介绍的纳什均衡分析方法，还不能完全满足完全信息静态博弈分析的需要。
- 为此，本节将对不存在纳什均衡和存在多个纳什均衡的博弈作一些讨论，关键是要引进在分析这两类博弈时非常重要的“混合策略”和“混合策略纳什均衡” (Mixsd-strategy Nash Equilibrium, MNE) 概念。

## 二、混合策略和纳什均衡的存在性

- 1、严格竞争博弈和混合策略的引进
- 2、多重均衡博弈和混合策略
- 3、混合策略和严格下策反复消去法
- 4、混合策略反应函数
- 5、纳什均衡的存在性
- 6、多重纳什均衡博弈的分析



## 1、 严格竞争博弈和混合策略的引进

- 我们首先对各博弈方的利益和偏好始终不一致的，在通常策略的基础上没有纳什均衡的博弈问题进行分析。这类博弈也可以称为“严格竞争博弈”。
- 前面介绍猜硬币博弈和齐威王田忌赛马博弈时曾经说过，如果这些博弈只进行一次，那么我们无法明确预测博弈的结果，不管是哪个博弈方，也不管他们选择的是哪个策略，都不能保证得到较好的结果。
- 通过前面的分析我们进一步知道，之所以上述博弈没有可预测的明确结果， 不能确定博弈方的策略，根本原因在于这些博弈中没有纳什均衡策略组合。
- 那么这是否意味着在这样的博弈中，各个博弈方选择任何策略都是一样的，因此可以随意选择呢？

## 1、 严格竞争博弈和混合策略的引进

- 这个问题的答案是否定的。事实上，在这些博弈中，博弈方的选择仍然是很有讲究的，策略选择的好坏对博弈方的利益仍然有很大的影响。
- 齐威王田忌赛马博弈和猜硬币博弈时，我们已经简单讨论过这两个博弈中各个博弈方策略选择的基本原则。当时得出的结论是，在这两个博弈中，各博弈方必须保证自身策略选择的随机性，以防止其他博弈方猜到自己的策略，或利用自己对策略选择的偏好获利。
- 这里我们以猜硬币博弈为例，进一步沿着这种思路分析此类博弈中博弈方的策略选择和博弈结果。

## 1、 严格竞争博弈和混合策略的引进

☞ （1）猜硬币博弈

猜硬币方

| 盖硬币方 | | 正 面 | 反 面 |
|---|---|---|---|
| | 正 面 | -1， 1 | 1， -1 |
| | 反 面 | 1， -1 | -1， 1 |

（A）不存在前面定义的纳什均衡策略组合

（B）关键是不能让对方猜到自己策略

这类博弈很多，引出混合策略纳什均衡概念



## 1、 严格竞争博弈和混合策略的引进

☞ （2）混合策略、混合策略博弈和混合策略纳什均衡

★混合策略：在博弈 $G=\{S_1,\cdots S_n;u_1,\cdots u_n\}$，博弈方i的策略空间为 $S_i=\{s_{i1},\cdots s_{ik}\}$，则博弈方i以概率分布 $p_i=(p_{i1},\cdots p_{ik})$ 随机在其k个可选策略中选择的“策略”，称为一个“混合策略”，其中 $0\le p_{ij}\le 1$ 对j=1，-，k都成立，且

$p_{i1}+\cdots+p_{ik}=1$

## 1、 严格竞争博弈和混合策略的引进

★混合策略扩展博弈：当把博弈方在混合策略的策略空间（概率分布空间）的选择看作一个博弈时，就是原博弈的“混合策略扩展博弈”。

★混合策略纳什均衡：包含混合策略的策略组合构成的纳什均衡称为“混合策略纳什均衡”。

11:53:31 31

## 1、 严格竞争博弈和混合策略的引进

(3)一个例子

| | | 博弈方2 | |
|---|---|---|---|
| | | C | D |
| 博弈方1 | A | 2，3 | 5，2 |
| | B | 3，1 | 1，5 |

$p_A\times3+p_B\times1=p_A\times2+p_B\times5$

$p_C\times2+p_D\times5=p_C\times3+p_D\times1$

- 该博弈无纯策略纳什均衡，可用混合策略纳什均衡分析
- 首先，本博弈中两博弈方决策的第一个原则，同样也是不能让对方猜到自己的选择，因而必须在决策时利用随机性。
- 第二个原则是他们选择每种策略的概率一定要恰好使对方无机可乘，即让对方无法通过针对性地倾向某一策略而在博弈中占上风。

## 1、 严格竞争博弈和混合策略的引进

混合策略纳什均衡结果

| | | 博弈方2 | |
|---|---|---|---|
| | | C | D |
| 博弈方1 | A | 2，3 | 5，2 |
| | B | 3，1 | 1，5 |

$$\begin{cases} p_A\times3+p_B\times1=p_A\times2+p_B\times5 \\ p_C\times2+p_D\times5=p_C\times3+p_D\times1 \\ p_A+p_B=1 \\ p_C+p_D=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_A=0.8 \\ p_B=0.2 \\ p_C=0.8 \\ p_D=0.2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1^e=0.8\times0.8\times2+0.8\times0.2\times5+0.2\times0.8\times3+0.2\times0.2\times1=2.6 \\ u_2^e=0.8\times0.8\times3+0.8\times0.2\times1+0.2\times0.8\times2+0.2\times0.2\times5=2.6 \end{cases}$$

## 1、 严格竞争博弈和混合策略的引进

(4)齐威王田忌赛马

| | | 田忌 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 上中下 | 上下中 | 中上下 | 中下上 | 下上中 | 下中上 |
| 齐威王 | 上中下 | 3，-3 | 1，-1 | 1，-1 | 1，-1 | -1，1 | 1，-1 |
| | 上下中 | 1，-1 | 3，-3 | 1，-1 | 1，-1 | 1，-1 | -1，1 |
| | 中上下 | 1，-1 | -1，1 | 3，-3 | 1，-1 | 1，-1 | 1，-1 |
| | 中下上 | -1，1 | 1，-1 | 1，-1 | 3，-3 | 1，-1 | 1，-1 |
| | 上下中 | 1，-1 | 1，-1 | 1，-1 | -1，1 | 3，-3 | 1，-1 |
| | 下中上 | 1，-1 | 1，-1 | -1，1 | 1，-1 | 1，-1 | 3，-3 |

收益矩阵

11:53:31

| | | 田忌 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 上中下g | 上中下h | 上中下i | 上中下j | 上中下k | 上中下l |
| 齐威王 | 上中下a | 3，-3 | 1，-1 | 1，-1 | 1，-1 | -1，1 | 1，-1 |
| | 上中下b | 1，-1 | 3，-3 | 1，-1 | 1，-1 | 1，-1 | -1，1 |
| | 上中下c | 1，-1 | -1，1 | 3，-3 | 1，-1 | 1，-1 | 1，-1 |
| | 上中下d | -1，1 | 1，-1 | 1，-1 | 3，-3 | 1，-1 | 1，-1 |
| | 上中下e | 1，-1 | 1，-1 | 1，-1 | -1，1 | 3，-3 | 1，-1 |
| | 上中下f | 1，-1 | 1，-1 | -1，1 | 1，-1 | 1，-1 | 3，-3 |

得益矩阵

$$\begin{aligned} &-3p_a-p_b-p_c+p_d-p_e-p_f \\ &=-p_a-3p_b+p_c-p_d-p_e-p_f \\ &=-p_a-p_b-3p_c-p_d-p_e+p_f \\ &=-p_a-p_b-p_c-3p_d+p_e-p_f \\ &=p_a-p_b-p_c-p_d-3p_e-p_f \\ &=-p_a+p_b-p_c-p_d-p_e-3p_f \end{aligned}$$

$$\Rightarrow p_a=p_b=p_c=p_d=p_e=p_f=1/6$$

$$\Rightarrow p_g=p_h=p_i=p_j=p_k=p_l=1/6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u^e_{齐威王}=\frac{1}{6}(3+1+1-1+1+1)=1 \\ u^e_{田忌}=\frac{1}{6}(-3-1-1+1-1-1)=-1 \end{cases}$$

## 1、 严格竞争博弈和混合策略的引进

★该博弈中，齐威王和田忌都以1/6的相同概率随机选择各自的六个纯策略，构成本博弈唯一的纯策略纳什均衡。

★在上述混合策略下，齐威王的得益为：

1/6 (3+1+1+1+1-1)=1

★田忌的得益为：

1/6 (1-3-1-1-1-1)=-1

★即经过多次进行这样的赛马，齐威王平均每次能赢田忌一千斤铜，这是因为齐威王三匹马的总体实力略胜田忌的三匹马的缘故。

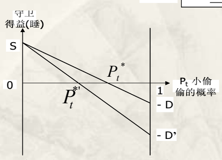
## 1、 严格竞争博弈和混合策略的引进

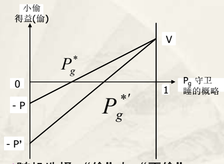
### (5) 小偷和守卫的博弈

- 因为对博弈论的贡献而成为1994年经济学诺贝尔奖得主之一的塞尔腾（Selten）教授，1996年3月在上海的一次讲演中，举了一个小偷和守卫之间博弈的例子。
- 一小偷欲偷窃有一守卫看守的仓库，如果小偷偷窃时守卫在睡觉，则小偷就能得手，偷得价值为V的赃 物；如果小偷偷窃时守卫没有睡觉，则小偷就会被抓住。设小偷被抓住后要坐牢，负效用为-P，守卫睡觉而未遭偷窃有S的正效用，因睡觉被窃要被解雇，其负效用为-D。而如果小偷不偷，则他既无得也无失，守卫不睡意味着出一份力挣一份钱，他也没有得失。
- 根据上述假设，小偷在该博弈中有"偷"和"不偷"两种可选策略，守卫有"睡"和"不睡"两种可选策略，双方的得益矩阵如下图所示。

小偷和守卫的博弈的混合策略纳什均衡

| | | 守卫 | |
|---|---|---|---|
| | | 睡 | 不睡 |
| 小偷 | 偷 | V，-D | -P，0 |
| | 不偷 | 0，S | 0，0 |




在小偷和守卫的博弈中，小偷分别以概率$P_t$*和1-$P_t$*随机选择 "偷"与"不偷"，守卫分别以概率$P_g$*和1- $P_g$*随机选择"睡"与"不睡"时， 双方都不能通过改变策略或概率改善自己的期望得益，因此构成混合策略纳什均衡，这也是该博弈惟一的纳什均衡。(小偷偷的概率应使守卫睡与不睡的收益相同，即为0；守卫睡觉的概率应使小偷偷与不偷的收益相同，即期望收益为0)

| | | 守卫 | |
|---|---|---|---|
| | | 睡 $p_g$ | 不睡 $1-p_g$ |
| 小偷 | 偷 $p_t$ | V，-D | -P，0 |
| | 不偷 $1-p_t$ | 0，S | 0，0 |

$$\begin{cases} p_t\times(-D)+(1-p_t)\times S=p_t\times 0+(1-p_t)\times 0 \\ p_g\times V+(1-p_g)\times(-P)=p_g\times 0+(1-p_g)\times 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_t^* = \dfrac{S}{S+D} \\ p_g^* = \dfrac{P}{V+P} \end{cases}$$

激励的悖论：

1. 加重对守卫的处罚(D)，短期中的效果是使守卫尽职，在长期中并不能使守卫更尽职，但会降低盗窃发生的概率；
2. 加重对小偷的处罚(P)，短期内能抑制盗窃发生率，长期并不能降低盗窃发生率，但会使得守卫更多的偷懒睡觉。

## 2、多重均衡博弈和混合策略

### 夫妻之争的混合策略纳什均衡

| | | 丈夫 | |
|---|---|---|---|
| | | 时装 | 足球 |
| 妻子 | 时装 | 2，1 | 0，0 |
| | 足球 | 0，0 | 1，3 |

夫妻之争

妻子的混合策略

$$p_w(C)\times 1+p_w(F)\times 0=p_w(C)\times 0+p_w(F)\times 3$$

丈夫的混合策略

$$p_h(C)\times 2+p_h(F)\times 0=p_h(C)\times 0+p_h(F)\times 1$$

夫妻之争博弈的混合策略纳什均衡

| | 策略 | 得益 |
|---|---|---|
| 妻子 | (0.75，0.25) | 0.67 |
| 丈夫 | (1/3，2/3) | 0.75 |

不难发现，这个结果明显不如夫妻双方能交流协商时，任何一方迁就另一方时双方的得益好，因为那时任何一方都至少得1。这是因为双方缺乏沟通时很可能出现最差结果而造成的。

## 3、 混合策略和重复剔除严格劣策略法

- 在包括混合策略的情况下，关于重复剔除严格劣策略法的结论仍然是成立的。即：
- ①任何博弈方都不会采用任何严格劣策略，不管它们是纯策略还是混合策略；
- ②重复剔除严格劣策略法不会消去任何纳什均衡，包括纯策略纳什均衡和混合策略纳什均衡；
- ③如果经过重复剔除后留下的策略组合是惟一的，那么一定是纳什均衡。
- 因此，在考虑混合策略的情况下，我们仍然可利用重复剔除严格劣策略法进行分析，而且实际上引进混合策略只有使重复剔除严格劣策略法的用处更大。

## 3、 混合策略和重复剔除严格劣策略法

一个数值例子

| | | 博弈方2 | |
|---|---|---|---|
| | | L | R |
| 博弈方1 | U | 3，1 | 0，2 |
| | M | 0，2 | 3，3 |
| | D | 1，3 | 1，1 |

- 在这个博弈中，博弈方1有U、M和D三种可选策略，博弈方2有L和R两种可选策略。
- 不难发现在纯策略的意义上，该博弈中不存在任何严格下策。因此，如果我们只考虑纯策略，那么两个博弈方都没有任何严格下策，因而严格下策反复消去法就无从运用。

- 但是，如果我们允许博弈方1采取混合策略，情况就会有所不同。设博弈方1采取如下的混合策略：
- 以概率分布(0.5，0.5，0) 随机选择U、M、D，即各一半机会选U、M，不选D。
- 那么与这个混合策略相比，D一定是博弈方1的严格下策。Why?
- 当博弈方2采用纯策略L时，博弈方1用上述混合策略的期望得益为：

$$u_1^e = \tfrac{1}{2}\times 3 + \tfrac{1}{2}\times 0 + 0\times 1 = \tfrac{3}{2}$$

|  |  | 博弈方2 L | 博弈方2 R |
|---|---|---|---|
| 博弈方1 | U | 3，1 | 0，2 |
|  | M | 0，2 | 3，3 |
|  | D | 1，3 | 1，1 |

- 当博弈方2采用纯策略R时，博弈方1用上述混合策略的期望得益为：

$$u_1^e = \tfrac{1}{2}\times 0 + \tfrac{1}{2}\times 3 + 0\times 1 = \tfrac{3}{2}$$

- 即使博弈方2也采用混合策略($q$，$1-q$)，博弈方1采用上述混合策略的期望得益还是：

$$u_1^e = \tfrac{1}{2}\times q\times 3+\tfrac{1}{2}\times(1-q)\times 0+\tfrac{1}{2}\times q\times 0+\tfrac{1}{2}\times(1-q)\times 3=\tfrac{3}{2}$$

- 也就是说，不管博弈方2采用哪种策略，包括所有可能的纯策略和所有混合策略(对应$q$的不同值)，博弈方1采用上述混合策略的期望得益始终为3/2，都大于采用D策略时能得到的确定性得益1。因此D策略相对于混合策略(0.5，0.5，0)是严格下策。

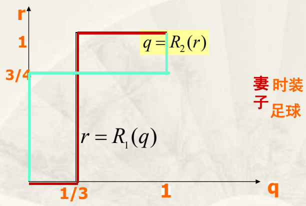
## 4、 混合策略反应函数

★在混合策略的范畴内，博弈方的决策内容为选择概率分布，反应函数就是一方对另一方的概率分布的反应，同样也是一定的概率分布。



## 4、 混合策略反应函数

★夫妻之争博弈




|  |  | 丈夫 时装 | 丈夫 足球 |
|---|---|---|---|
| 妻子 | 时装 | 2，1 | 0，0 |
|  | 足球 | 0，0 | 1，3 |

夫妻之争

(r,1-r)：妻子的混合策略概率分布
(q,1-q)：丈夫的混合策略概率分布



## 5、 纳什均衡的存在性

➢ 纳什定理

★纳什在他1950年的经典论文中，首先提出了他自己称为“均衡点”的纳什均衡概念，并且同时证明了在相当广泛的博弈类型中，混合策略意义上的纳什均衡是普遍存在的。这个经典成果可以表述为下述定理：

★纳什定理（Nash 1950）：在一个有n个博弈方的博弈G＝{$S_1$，...$S_n$；$u_1$，...$u_n$}中，如果n是有限的，且$S_i$都是有限集（对n＝1,...,n），则该博弈至少存在一个纳什均衡，但可能包含混合策略。

★用更通俗的语言，这个定理就是说“每一个有限博弈都至少有一个混合策略纳什均衡”。



## 6、 多重纳什均衡博弈的分析

☞（1）帕累托上策均衡
☞（2）风险上策均衡
☞（3）聚点均衡
☞（4）相关均衡



## (1) 、帕累托占优均衡

- 事实上，并不是所有多重纳什均衡博弈都会导致分析的困难。因为虽然有些博弈中存在多个纳什均衡，但很可能这些纳什均衡有明显的优劣差异，所有博弈方都偏好其中同一个纳什均衡。
- 换句话说，可能有这些纳什均衡中的某一个，给所有博弈方带来的利益，都大于其他所有纳什均衡会带来的利益。这时候博弈方的选择倾向性就会是一致的，各个博弈方不仅自己会选择该纳什均衡的策略，而且可以预料其他博弈方也会选择该纳什均衡的策略，因此不会有选择困难。事实上，本章前面的讨论中已经用了这样的思想。
- 上述多重纳什均衡选择所依据的，实际上就是帕累托效率意义上的 优劣关系，因此用这种方法选择出来的纳什均衡，也称为“帕累托占优均衡”。

## （1）帕累托占优均衡

（鹰鸽博弈）
这个博弈中有两个纯策略纳什均衡，（战争，战争）和（和平，和平），显然后者帕累托优于前者，所以，（和平，和平）是本博弈的一个帕累托占优均衡。

| | | 国家2 战争 | 国家2 和平 |
|---|---|---|---|
| 国家1 | 战争 | -5，-5 | 8，-10 |
| | 和平 | -10，8 | 10，10 |

战争与和平

11:53:31 49

## （2）、风险占优均衡(Risk-dominant Equilibrium)

- 在存在帕累托效率意义上优劣关系的情况下，帕累托上策均衡作为均衡选择的基本法则是容易理解的。
- 不过帕累托上策均衡并不是有强制力的法则，这一点根据上面对战争与和平博弈的讨论我们就可以感觉到。
- 此外更重要的是：其他某种同样是合理的选择逻辑的作用会超过帕累托效率的选择逻辑，因此即使是完全理性的决策者也不一定会选帕累托上策均衡。

## （2）风险占优均衡

考虑、顾及其他博弈方可能发生错误等情况时，帕累托上策均衡并不一定是最优选择，需要考虑：风险占优均衡。下面就是两个例子。

| | | 博弈方2 L | 博弈方2 R |
|---|---|---|---|
| 博弈方1 | U | 9，9 | 0，8 |
| | D | 8，0 | 7，7 |

风险上策均衡（D，R）

| | | 猎人2 鹿 | 猎人2 兔子 |
|---|---|---|---|
| 猎人1 | 鹿 | 5，5 | 0，3 |
| | 兔子 | 3，0 | 3，3 |

猎鹿博弈

风险上策均衡（兔子，兔子）

11:53:31 51

## （3）、聚点均衡

- 在多重纳什均衡的博弈中，双方同时选择一个聚点构成的纳什均衡称为“聚点均衡”(Focal Points Equilibrium)。
- 聚点均衡首先是纳什均衡，是多重纳什均衡中比较容易被选择的纳什均衡。
- 这个点之所以成为“聚点”，是因为博弈各方的文化和经验使他们相信这个点是大家都容易想到的、习惯选择的点。聚点均衡利用博弈设定以外的信息和依据选择的均衡文化、习惯或者其他各种特征都可能是聚点均衡的依据
- 城市博弈（城市分组相同）、时间博弈（报出相同的时间）是聚点均衡的典型例子。
- 聚点均衡确实反映了人们在多重纳什均衡选择中的某些规律性，但因为它们涉及的方面众多，因此虽然对每个具体的博弈问题可能可以找出聚点，但对一般的博弈却很难总结普遍规律，只能具体问题具体分析。

## （4）、相关均衡

- 实际上，人们在现实中遇到选择困难时，特别是在长期中反复遇到相似的选择难题时，常会通过收集更多信息，形成特定的机制和规则，也就是某种形式的制度安排等主动寻找出路。
- 因此对于博弈中多重纳什均衡选择的难题，我们也应该考虑博弈方主动寻求方法，设计某种形式的均衡选择机制，以解决多重纳什均衡选择问题的可能性。
- “相关均衡”(Correlated Equilibrium)就是这样的一种均衡选择机制。相关均衡的基本思想可以通过下列2×2静态博弈来说明。

| | | 博弈方2 L | 博弈方2 R |
|---|---|---|---|
| 博弈方1 | U | 5，1 | 0，0 |
| | D | 4，4 | 1，5 |

相关均衡例子

- (U，L)和(D，R)是两个纯策略纳什均衡；
- 一个混合策略纳什均衡[(0.5，0.5)，(0.5，0.5)]，即两博弈方都以0.5的概率在自己的两个纯策略中随机选择。
- 虽然该博弈的两个纯策略纳什均衡，都能使两博弈方得到6单位得益总和，但在这两个纳什均衡下双方的利益相差很大，因此很难在两博弈方之间形成自然的妥协。
- 如果采用混合策略纳什均衡，因为有1/4的可能性遇到最不理想的(U，R)，而且双方的期望得益都只有2.5单位，显然也不理想。

博弈方2

| 博弈方1 | L | R |
| --- | --- | --- |
| U | 5，1 | 0，0 |
| D | 4，4 | 1，5 |

相关均衡例子

- 由于避免出现(U，R)结果符合双方的利益，因此双方有可能通过协商约定采用如“抛一硬币，出现正面博弈方1采用U，博弈方2采用L；出现反面博弈方1采用D，博弈方2采用R”这样的选择规则。
- 按照这样的规则选择，那么两个纯策略纳什均衡(U，L)和(D，R)各有1/2出现的可能，且可以保证排除采用混合策略可能出现的(U，R)，双方的期望得益都是3，明显好于双方各自采用混合策略的期望得益，也解决了双方在两个纯策略纳什均衡选择方面的僵局。
- 同样的思想用到夫妻之争博弈中就是双方可能形成这样的约定：“如果天气好一起去看足球赛，天气不好则一起看时装表演”。

博弈方2

| 博弈方1 | L | R |
| --- | --- | --- |
| U | 5，1 | 0，0 |
| D | 4，4 | 1，5 |

相关均衡例子

- 其实该博弈还可能实现更好的结果。 该博弈有一个总得益更高的策略组合(D，L)，由于它不是纳什均衡，因此除了混合策略纳什均衡中包含采用它的可能性以外，在一次性博弈中无法实现它。
- 如果我们将上述通过抛硬币排除(U，R)的方法加以发展，就可以设计出一种能够包含进这个策略组合，同时又能排除(U，R)的方法。

- 这种方法的关键是发出下列“相关信号”(Correlated Signals)的“相关装置”：(1)该装置以相同的可能性（各1/3）发出A、B、C三种信号；(2)博弈方1只能看到该信号是否A，博弈方2只能看到该信号是否C；(3)博弈方1看到A采用U，否则采用D；博弈方2看到C采用R，否则采用L。
- 该机制有下列性质：
- (1)保证U和R不会同时出现，即排除掉了(U，R)；(2)保证(U，L)、(D，L)和(D，R)各以1/3的概率出现，从而两博弈方的期望得益达到3 +1/3；(3)上述策略组合是一个纳什均衡；(4)上述相关装置并不影响双方各种策略组合下的得益，因此并不影响原来的均衡。即如果一个博弈方忽视信号，另一个博弈方也可以忽视信号，并不影响各博弈方原来可能实现的利益。

# 三、二人零和博弈

1、二人有限零和博弈的描述

2、纯策略意义下的解

3、混合策略意义下的解

## 1、二人有限零和博弈的描述

- **零和博弈**：也称“严格竞争博弈”。博弈方之间利益始终对立

  —猜硬币，田忌赛马，石头-剪刀-布

- 二人有限零和博弈是指参加博弈的参与人只有两个，每个参与人都只有有限多个策略可供选择，而且在任何一个局势中，两个参与人的收益之和总是等于零。

## 1、二人有限零和博弈的描述

设两参与人分别为甲和乙，甲有 m个纯策略 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$可供选择，乙有n个纯策略 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 可供选择，则甲乙的策略集分别为

$$S_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$$
$$S_2=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$$

当甲选定$\alpha_i$、乙选定$\beta_j$后，就形成了一个策略组合（也称局势）$(\alpha_i,\beta_j)$，对任一局势，记甲的赢得收益为$a_{ij}$，则甲的赢得收益矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

相应，乙的赢得为-A

通常，将二人有限零和博弈记成 $G=\{S_1,S_2;A\}$——矩阵对策

## 2、纯策略意义下的解

(1)、**最小最大原理**

- 由冯●诺依曼提出
- **基本思想**：

作为局中人，对手将采取对他自己最有利的策略；相应的，对手会选择使你获得尽可能差的支付的策略。

**由于零和博弈的特点和性质，以上思想即为：任何使对手得到最好结果的策略，都会使你获得最差的结果。双方都具有这样的理性！**

## 2、纯策略意义下的解

- 假定现在给出的是行局中人的支付矩阵，站在行局中人的角度看，他当然希望博弈的结果是支付尽可能大的那个矩阵位置，而列局中人则希望博弈的结果是支付尽可能小的那个位置。
- 行局中人会认为，对他所能选择的每个行策略，列局中人都将选择该行中数字最小的那一列。因此，行局中人应该选择在列局中人所选择的这些每行的最小的数字中最大的数字所对应的那一行。就是选择“最小”中的“最大”。

## 2、纯策略意义下的解

- 同样，列局中人也会认为，对于他所能选择的每一列，行局中人都将选择该列中具有最大数字的那一列。即列局中人会在行局中人所选择的这些每列的最大数字中选择最小的数字所对应的那一列。即为“最大”中的“最小”。
- 如果行局中人的“最小”中的“最大”和列局中人的“最大”中的“最小”的值出现在支付矩阵的同一个位置，则该结果就构成博弈的纳什均衡。
- 这种在零和博弈中寻找纯策略纳什均衡的方法，称为最大最小-最小最大法，简称最小最大法。

## 2、纯策略意义下的解

定义：对于矩阵对策 $G=\{S_1,S_2,A\}$，若存在局势 $\{\alpha_{i^*},\beta_{j^*}\}$ 满足 $\alpha_{ij^*}\le\alpha_{i^*j^*}\le\alpha_{i^*j}$ $i=1,\cdots;m,j=1,\cdots;n$
则称局势 $\{\alpha_{i^*},\beta_{j^*}\}$ 为矩阵对策G的解。$\alpha_{i^*}$，$\beta_{j^*}$ 分别为局中人1和2的最优策略。$\alpha_{i^*j^*}$ 为矩阵对策的值，记作 $v_G=\alpha_{i^*j^*}$

## 2、纯策略意义下的解

例1：某城市有A、B两家电视机厂，A厂设计了4种型号的电视机A1, A2, A3, A4；B厂设计了3种型号的电视机B1, B2, B3，由于资金所限，两厂均只能选择一种型号的电视机投产，根据权威市场研究机构调查，该市居民将用1600万元购买本地产电视机，而对双方不同的型号，预测A厂的销售额如表1所示（单位：万元）

| | | B厂 | | |
|---|---|---|---|---|
| | | **B1** | **B2** | **B3** |
| A厂 | **A1** | 380 | 870 | 240 |
| | **A2** | 1010 | 940 | 1080 |
| | **A3** | 1430 | 730 | 170 |
| | **A4** | 590 | 730 | 1220 |

请问：A、B两厂分别会选择生产哪种型号电视机呢？

（1）构建二人零和博弈模型

减去平均收益800万元

| | | B厂 | | |
|---|---|---|---|---|
| | | **B1** | **B2** | **B3** |
| A厂 | **A1** | -420 | 70 | -560 |
| | **A2** | 210 | 140 | 280 |
| | **A3** | 630 | -70 | -630 |
| | **A4** | -210 | -70 | 420 |

（2）求解模型：最大最小原则（最小最大原则），即考虑最坏的可能性的基础上争取最好的结果

| | **B1** | **B2** | **B3** | min |
|---|---|---|---|---|
| **A1** | -420 | 70 | -560 | -560 |
| **A2** | 210 | 140 | 280 | 140 |
| **A3** | 630 | -70 | -630 | -630 |
| **A4** | -210 | -70 | 420 | -210 |
| max | 630 | 140 | 420 | maxmin / minmax |

## 2、纯策略意义下的解

| | | 参与人2 L | 参与人2 M | 参与人2 R |
|---|---|---|---|---|
| 参与人1 | U | 5，-5 | 3，-3 | 1，-1 |
| 参与人1 | M | 6，-6 | 2，-2 | 1，-1 |
| 参与人1 | D | 1，-1 | 0，0 | 0，0 |

## 2、纯策略意义下的解

- 最小最大方法与相对优势策略划线法一样，都是寻找同时行动博弈的纯策略纳什均衡的一种方法。但是，最小最大方法的适用范围窄，只适用于零和博弈。
- 问题：如果一个零和博弈中不存在纯策略纳什均衡，怎么办？

参与人2

| | | 石头 | 剪刀 | 布 |
|---|---|---|---|---|
| 参与人1 | 石头 | 0，0 | 1，-1 | -1，1 |
| | 剪刀 | -1，1 | 0，0 | 1，-1 |
| | 布 | 1，-1 | -1，1 | 0，0 |

## 3、混合策略意义下的解

- 最小最大方法：

  适用于零和博弈的纯策略纳什均衡

- 扩展的最小最大方法

  （直线交叉方法）：

  适用于零和博弈的混合策略纳什均衡

## 3、混合策略意义下的解

| 支付 2 / 1 | 正 | 反 | |
|---|---|---|---|
| 正 | -1 | 1 | min= -1 |
| 反 | 1 | -1 | min= -1 |
| | max=1 | max=1 | |

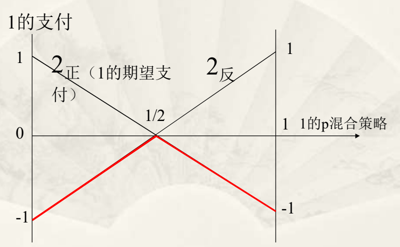
## 3、混合策略意义下的解

1的选择

| 支付 2 / 1 | 正 | 反 | |
|---|---|---|---|
| 正（p） | -1 | 1 | min=-1 |
| 反（1-p） | 1 | -1 | min=-1 |
| p-混合 | -p+(1-p) | p-(1-p) | |

## 3、混合策略意义下的解

参与人1的p-混合策略图解




## 3、混合策略意义下的解

- 在均衡状态下，对于每一个可能的p-混合的值，1会预期2总是选择对2自己最有利的行动。因此，对于任何一个具体的p值，1总是预期2会选择与图中两条直线中处于较低位置的直线所对应的行动。
- 当1选择正面的概率小于50%时，1预期2会选择反面；而当1选择正面的概率大于50%时，1预期2会选择正面。如果1选择正面和反面的概率各占50%时，则2选择正面反面所得到的支付是相同的。

## 3、混合策略意义下的解

- 我们用红线表示出来，以强调在1所能选择的每一个p-混合策略下，2能够做到的使1得到的最低支付。这个呈倒V型的图像给出了在1所能选择的所有混合策略与他能得到的最小支付之间的关系。整个倒V型图像就是位于p-混合行的最右端所应填上的最小值，它不再是一个数，而是一个函数。

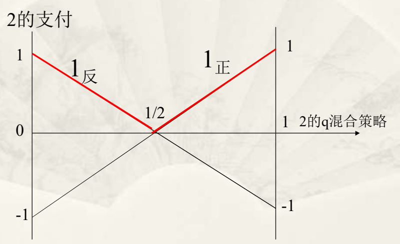
## 3、混合策略意义下的解

2的选择

| 支付 2 / 1 | 正 (q) | 反 (1-q) | q-混合 |
|---|---|---|---|
| 正 | -1 | 1 | -q+(1-q) |
| 反 | 1 | -1 | q-(1-q) |
| | max=1 | max=1 | |

## 3、混合策略意义下的解

参与人2的q-混合策略图解




## 3、混合策略意义下的解

- 找出1和2的最优策略选择后，把这两个策略选择放在一起，并证明它们构成这个博弈的纳什均衡。
- 给定1选择P-混合策略，此时2无论是选择正面还是反面，他所得到的期望支付都是0，这与他采取q-混合策略时所得到的支付是相同的，因此，2没有激励偏离给定的q-混合策略的选择。事实上，这也是说q=0.5构成2的最优选择的整个逻辑基础。

## 3、混合策略意义下的解

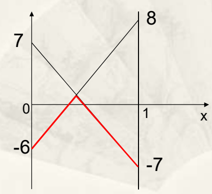
- 反过来，给定2选择q-混合策略，1选择正面或反面的纯策略，或者两者混合的策略所得到的期望支付都是0. 因此，他没有激励偏离给定的p=0.5混合策略选择。这样，1的p=0.5是针对2的q=0.5最优反应。合起来，这两个混合策略是1和2相互间的最优反应，因此构成这个博弈的纳什均衡。

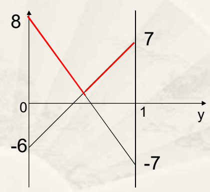
例2：求二人零和博弈的均衡值（鞍点）

$$A=\begin{pmatrix}-7 & 8\\ 7 & -6\end{pmatrix}$$

解：设甲的混合策略为 $(x,1-x)$，$x\in[0,1]$ 则

乙的混合策略为 $(y,1-y)$，$y\in[0,1]$



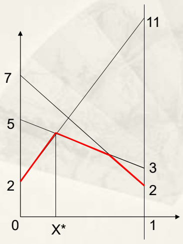

计算得 $x=13/28, V_G=1/2$　　$y=1/2, V_G=1/2$

因此，甲的混合策略为（13/28，15/28），乙的混合策略为（1/2，1/2）

例3：求解下面零和博弈矩阵的混合策略

$$A=\begin{pmatrix}2&3&11\\7&5&2\end{pmatrix}$$

解：设甲的混合策略为 $(x,1-x)$ ，$x\in[0,1]$ 则




$$\begin{cases}V_G=9x+2\\V_G=-2x+5\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=3/11\\V_G=49/11\end{cases}$$

根据图可分析出，乙不可能选择策略1，因此y1=0

$$\begin{cases}49/11=3y_2+11y_3\\49/11=5y_2+2y_3\\y2+y3=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}y_2=9/11\\y_3=2/11\end{cases}$$

因此，该博弈中，甲的混合策略为 $x^*=(\frac{3}{11},\frac{8}{11})$

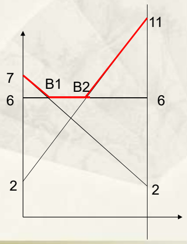
乙的混合策略为 $y^*=(0,\frac{9}{11},\frac{2}{11})$

最优期望收益为 $V_G=\frac{49}{11}$

练习：求解下面零和博弈矩阵的混合策略

$$A=\begin{pmatrix}2&7\\6&6\\11&2\end{pmatrix}$$

解：设乙的混合策略为 $(y,1-y)$ ，$y\in[0,1]$




$$y^*=(y,1-y),其中y\in[\frac{1}{5},\frac{4}{9}]$$

$$x^*=(0,1,0)$$

$$V_G=6$$

线性规划解法

求解零和博弈 $G=\{S_1,S_2;A\}$，其中 $S_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\},S_2=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$

$$A=\begin{pmatrix}-4&2&5\\2&0&3\\5&-1&-4\end{pmatrix}$$

解：设参与人甲的最优混合策略为 $(p_1,p_2,p_3)$，期望收益为 $v$ ，则得到如下一组不等式

$$\begin{cases}p_1a_{11}+p_2a_{21}+p_3a_{31}\ge v\\p_1a_{12}+p_2a_{22}+p_3a_{32}\ge v\\p_1a_{13}+p_2a_{23}+p_3a_{33}\ge v\end{cases}$$

令 $x_1=\frac{p_1}{v},x_2=\frac{p_2}{v},x_3=\frac{p_3}{v}$，则 $x_1+x_2+x_3=\frac{p_1+p_2+p_3}{v}=\frac{1}{v}$

甲希望期望收益 $v$ 最大化，则应将 $\frac{1}{v}=x_1+x_2+x_3$ 最小化

根据收益矩阵情况，所有元素可加上适当的数使得v非负，这样，线性规划模型的变量取值即可要求全为非负，即

得到 $\min\frac{1}{v}=x_1+x_2+x_3$

$$\begin{cases}x_1a_{11}+x_2a_{21}+x_3a_{31}\ge 1\\x_1a_{12}+x_2a_{22}+x_3a_{32}\ge 1\\x_1a_{13}+x_2a_{23}+x_3a_{33}\ge 1\\x_1\ge0,x_2\ge0,x_3\ge0\end{cases}$$

因此原收益矩阵加上4可变为

$$A'=\begin{pmatrix}0&6&9\\6&4&7\\9&3&0\end{pmatrix}$$

代入甲的线性规划模型，得到

$$\min\frac{1}{v}=x_1+x_2+x_3$$

$$\begin{cases}6x_2+9x_3\ge1\\6x_1+4x_2+3x_3\ge1\\9x_1+7x_2\ge1\\x_1\ge0,x_2\ge0,x_3\ge0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=0.0826\\x_2=0.0854\\x_3=0.0542\\\min\frac{1}{v}=\frac{2}{9}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p_1=0.372\\p_2=0.384\\p_3=0.244\end{cases}$$

同理，乙的混合策略求解的线性规划模型为

$$\max\frac{1}{v}=y_1+y_2+y_3$$

$$\begin{cases}6y_2+9y_3\le1\\6y_1+4y_2+7y_3\le1\\9y_1+3y_2\le1\\y_1\ge0,y_2\ge0,y_3\ge0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y_1=0.0556\\y_2=0.1667\\y_3=0\\\max\frac{1}{v}=\frac{2}{9}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}q_1=0.25\\q_2=0.75\\q_3=0\end{cases}$$

所以，甲的最优混合策略为（0.372，0.384，0.244）

所以，乙的最优混合策略为（0.25，0.75，0）

最优期望收益为 $v=\frac{9}{2}-4=\frac{1}{2}$

**练习**

$$A=\begin{pmatrix}10 & -6 & 3\\ 8 & 5 & -5\\ -12 & -10 & 8\end{pmatrix}$$

解：将原收益矩阵各元素均加上12，得到

$$A'=\begin{pmatrix}22 & 6 & 15\\ 20 & 17 & 7\\ 0 & 2 & 20\end{pmatrix}$$

构建线性规划模型为

$$\min\frac{1}{v}=x_1+x_2+x_3 \qquad \max\frac{1}{v}=y_1+y_2+y_3$$

$$\begin{cases}22x_1+20x_2\ge 1\\ 6x_1+17x_2+2x_3\ge 1\\ 15x_1+7x_2+20x_3\ge 1\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0\end{cases} \qquad \begin{cases}22y_1+6y_2+15y_3\le 1\\ 20y_1+17y_2+7y_3\le 1\\ 2y_2+20y_3\le 1\\ y_1\ge 0, y_2\ge 0, y_3\ge 0\end{cases}$$

求解线性规划模型，得到甲乙两人的最优混合策略分别为

$$(p_1,p_2,p_3)=(0,0.643,0.357) \quad (q_1,q_2,q_3)=(0,0.464,0.536)$$

$$v^*=1/0.08589-12=-0.357$$

## 四、应用举例

根据上一节的分析已经明白，分析完全信息静态博弈的关键是找出其中的纳什均衡。但前面所讨论都是可通过策略之间的两两比较进行分析的有限策略博弈模型。在无限策略、连续策略空间的博弈中，纳什均衡的概念同样适用。我们通过具体模型来说明这种博弈的纳什均衡分析方法。

87

## 四、应用举例

1、 古诺模型

2、 伯特兰德寡头模型

## 1、古诺（Cournot）模型

★古诺模型是研究寡头垄断市场的经典模型，在古诺模型中，假设一个市场有两家生产同一种产品的厂商。如果厂商1的产量为$q_1$，厂商2的产量为$q_2$，则市场总产量为$Q=q_1+q_2$。设市场出清价格P（即可以将产品全部卖出去的价格）是市场总产量的函数（即逆需求函数）$P=P(Q)=a-Q$。再设两厂商有相同的单位生产成本$c_1=c_2=c$，且都没有固定成本，则该博弈中两博弈方的收益（即两厂商各自的利润）分别为：

11:53:32 89

## 1、古诺（Cournot）模型

$$u_1(q_1,q_2)=q_1p(Q)-cq_1$$
$$=q_1(a-q_1-q_2)-cq_1 \quad \cdots(1)$$

和

$$u_2(q_1,q_2)=q_2p(Q)-cq_2$$
$$=q_2(a-q_1-q_2)-cq_2 \quad \cdots(2)$$

★虽然本博弈中两博弈方都有无限多种可选策略，但根据纳什均衡的定义我们知道，纳什均衡就是具有相互是最优对策性质的各博弈方策略组成的策略组合。

11:53:32 90

## 1、古诺（Cournot）模型

★因此，如果假设策略组合 $(q_1^*, q_2^*)$ 是本博弈的纳什均衡，则 $(q_1^*, q_2^*)$ 必须是使得两博弈方的收益达到最大值，即满足：

$$\begin{cases}\max\limits_{q_1}\{q_1(a-q_1-q_2^*)-cq_1\}\\ \max\limits_{q_2}\{q_2(a-q_1^*-q_2)-cq_2\}\end{cases}$$

11:53:32 91

## 1、古诺（Cournot）模型

要求上式的最大值，只需(1)、(2)两式分别对 $q_1$、$q_2$ 求偏导并令两个偏导数都等于零，由此可得 $q_1^*$, $q_2^*$ 应满足方程组：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_1}{\partial q_1}=a-c-2q_1-q_2=0\\ \dfrac{\partial u_2}{\partial q_2}=a-c-q_1-2q_2=0\end{cases}$$

11:53:32

## 1、古诺（Cournot）模型

解之得该方程组唯一的一组解：$q_1^*=q_2^*=\frac{1}{3}(a-c)$

均衡总产量为：$Q^*=q_1^*+q_2^*=\frac{2}{3}(a-c)$

两博弈方的均衡得益(利润)分别为：

$$u_1^*(q_1^*,q_2^*)=u_2^*(q_1^*,q_2^*)=\frac{1}{9}(a-c)^2$$

具体地,若设：$a=8$ , $c=2$

则：$q_1^*=q_2^*=2$ , $Q^*=4$ , $u_1^*=u_2^*=4$

11:53:32 93

## 1、古诺（Cournot）模型

如果想对上述博弈结果作效率评价，可以再从两厂商总体利益最大化的角度作一次产量选择，根据已知条件求实现总得益(总利润)最大的总产量 。

设总产量为Q，则总得益为U＝PQ － cQ＝Q(8－Q)－2Q＝6Q － Q²。很容易求得使总得益最大的总产量Q*＝3，最大总得益U*＝9。

11:53:32 94

## 1、古诺（Cournot）模型

将此结果与两厂商独立决策，追求自身而不是共同利益最大化时的博弈结果相比，不难发现此时总产量较小，而总利润却较高。

因此从两厂商的总体来看，根据总体利益最大化确定产量效率更高。换句话说，如果两厂商更多考虑合作，联合起来决定产量，先定出使总利益最大的产量后各自生产一半(1.5 ， 1.5单位)，则各自可分享到的利益为4 .5，比只考虑自身利益的独立决策行为得到的利益要高。

11:53:32 95

## 1、古诺（Cournot）模型

当然，在独立决策、缺乏协调机制的两个企业之间，上述合作的结果并不容易实现，即使实现了也往往是不稳定的。合作难以实现或维持的原因主要是：各生产一半实现最大总利润产量的产量组合(1.5 ，1.5) 不是该博弈的纳什均衡策略组合。

11:53:32 96

## 1、古诺（Cournot）模型

也就是说，在这个策略组合下，双方都可以通过独自改变（增加）自己的产量而得到更高的利润，它们都有突破1.5单位产量的冲动。在缺乏由强制作用的协议等保障手段的情况下，这种冲动注定了维持上述较低水平的产量组合是不可能的，两厂商早晚都会增产，只有达到纳什均衡的产量水平（2，2）时才会稳定下来。

因为只有这时候任一厂商单独改变产量才不利于自己，这实际上也是一种"囚徒困境"，如果将遵守限额还是突破限额作为厂商面临的选择，则构成了得益矩阵如下图的博弈。



## 1、古诺（Cournot）模型

| | | 厂商2 不突破 | 厂商2 突破 |
|---|---|---|---|
| 厂商1 | 不突破 | 4.5 , 4.5 | 3.75 , 5 |
| | 突破 | 5 , 3.75 | 4 , 4 |

当然不难看出该博弈是一个囚徒困境博弈。

上述两寡头产量博弈只是古诺模型中比较简单的一个特例，更一般的古诺模型是包括n 个寡头的寡占市场产量决策。但其分析方法是一样的。

典型例子：石油输出国组织的限额和突破问题



## 1、古诺（Cournot）模型

### （2）、反应函数

★古诺模型的纳什均衡也可以通过对划线法思路的推广来求，划线法的思路是先找出每个博弈方针对其他博弈方所有策略（或策略组合）的最佳对策，然后再找出相互构成最佳对策的各博弈方策略组成的策略组合，也就是博弈的纳什均衡。

★在无限策略的古诺博弈模型中这样的思路实际上也是可行的，只是其他博弈方的策略现在有无限多种，因此各个博弈方的最佳对策也有无限种，它们之间往往构成一种连续函数关系。

## 1、古诺（Cournot）模型

### （2）、反应函数

在上面讨论的两寡头古诺模型中，对厂商2的任意产量$q_2$，厂商1的最佳对策产量$q_1$，就是使己在厂商2生产产量$q_2$的情况下利润最大化的产量，即$q_1$是最大化问题：

$$\max_{q_1}\{q_1(6-q_1-q_2)-2q_1\}$$

的解。上式对$q_1$求导并令导数等于0：

$$\frac{\partial u_1}{\partial q_1}=6-2q_1-q_2=0$$

由此得：

$$q_1=R_1(q_2)=\frac{1}{2}(6-q_2)$$



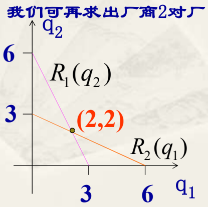
## 1、古诺（Cournot）模型

### （2）、反应函数

这样我们得到了对于厂商2的每一个可能的产量，厂商1的最佳对策产量的计算公式，它是厂商2产量的一个连续函数，我们称这个连续函数为厂商1对厂商2产量的一个"反应函数"（Reaction Function）。同样的方法，我们可再求出厂商2对厂商1产量$q_1$的反应函数：

$$q_2=R_2(q_1)=\frac{1}{2}(6-q_1)$$

由于这两个反应函数都是连续的线性函数，因此可以用坐标平面上的两条直线表示它们，如图：






## 1、古诺（Cournot）模型

### （2）、反应函数

从图中可以看出，当一方的产量选择为0时，另一方的最佳反应为3。这正是实现市场总利润最大的产量，因为这时候等于由一个厂商垄断市场，市场总体利润就是该厂商的利益；当一方的产量达到6时，另一方被迫选择0，因为这时后者坚持生产已经无利可图。

在两个反应函数对应的两条直线上，只有它们的交点（2，2）代表的产量组合，才是由相互对对方的最佳反应产量构成的。

$R_1(q_2)$上的其他所有点$(q_1, q_2)$只有$q_1$是对$q_2$的最佳反应，$q_2$不是对$q_1$的最佳反应，而$R_2(q_1)$上的点则刚好相反。

## 1、古诺（Cournot）模型

### (2)、反应函数

根据纳什均衡的定义，(2, 2)是该古诺模型的纳什均衡，并且因为它是惟一的一个，因此应该是该博弈的结果。这个结论与前面直接根据纳什均衡定义得到的完全一样。



## 2、伯特兰德(Bertrand)寡头模型

★现在我们把反应函数法应用到伯特兰德模型的分析。伯持兰德1883年提出了另一种形式的寡占模型。这种模型与选择产量的古诺模型的区别在于，伯特兰德模型中各厂商所选择的是价格而不是产量。我们用简单的两寡头且产品有一定差别的伯特兰德价格博弈模型进行分析。



## 2、伯特兰德(Bertrand)寡头模型

上述产品有一定差别是指两个厂商生产的是同类产品，但在品牌、质量和包装等方面有所不同，因此伯特兰德模型中厂商的产品之间有很强的替代性。但又不是完全可替代，即价格不同时，价格较高的不会完全销不出去。当厂商1和厂商2价格分别为$P_1$和$P_2$时，它们各自的需求函数为：

$$q_1 = q_1(P_1, P_2) = a_1 - b_1P_1 + d_1P_2$$

和

$$q_2 = q_2(P_1, P_2) = a_2 - b_2P_2 + d_2P_1$$



## 2、伯特兰德(Bertrand)寡头模型

从上式可以看出产品之间是有差别的，其中$d_1$，$d_2>0$即两厂商产品的替代系数。我们也假设两厂商无固定成本，假设边际生产成本分别为$c_1$和$c_2$。

两博弈方的得益函数分别为：

$$u_1(P_1,P_2) = P_1q_1 - c_1q_1 = (P_1 - c_1)(a_1 - b_1P_1 + d_1P_2)$$

$$u_2(P_1,P_2) = P_2q_2 - c_2q_2 = (P_2 - c_2)(a_2 - b_2P_2 + d_2P_1)$$

我们直接用反应函数法分析这个博弈。上两式分别对$P_1$和$P_2$求偏导，并令偏导数为0，由此得：



## 2、伯特兰德(Bertrand)寡头模型

$$\frac{\partial u_1}{\partial P_1} = a_1 + b_1c_1 - 2b_1P_1 + d_1P_2 = 0$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial P_2} = a_2 + b_2c_2 - 2b_2P_2 + d_2P_1 = 0$$

很容易求出两厂商对对方策略(价格)的反应函数分别为

$$P_1 = R_1(P_2) = \frac{1}{2b_1}(a_1 + b_1c_1 + d_1P_2)$$

和 $$P_2 = R_2(P_1) = \frac{1}{2b_2}(a_2 + b_2c_2 + d_2P_1)$$



## 2、伯特兰德(Bertrand)寡头模型

纳什均衡$(P_1^*, P_2^*)$必是两反应函数的交点，即必须满足：

$$\begin{cases} P_1^* = \dfrac{1}{2b_1}(a_1 + b_1c_1 + d_1P_2^*) \\ P_2^* = \dfrac{1}{2b_2}(a_2 + b_2c_2 + d_2P_1^*) \end{cases}$$

记：$a_1' = a_1 + b_1c_1$， $a_2' = a_2 + b_2c_2$

求解此方程组即可得到纳什均衡$(P_1^*, P_2^*)$：

## 2、伯特兰德(Bertrand)寡头模型

$$P_1^* = \frac{a_1'(2b_2 + d_1)}{4b_1b_2 - d_1d_2}, P_2^* = \frac{a_2'(2b_1 + d_2)}{4b_1b_2 - d_1d_2}$$

将$P_1^*$，$P_2^*$代入得益函数则可进一步得到两厂商的**均衡得益**值。

具体地，如果进一步假设模型中的参数分别为：

$$a_1 = a_2 = 28，b_1 = b_2 = 1, d_1 = d_2 = 0.5，c_1 = c_2 = 2$$

则可以得到：$P_1^* = P_2^* = 20$，$u_1^* = u_2^* = 324$。



## 2、伯特兰德(Bertrand)寡头模型

上述模型是伯特兰德模型较简单的情况。更一般的情况是有**n个寡头**的价格决策，并且产品也可以是**无差别**的。

值得一提的另外一点是，这种价格决策与古诺模型中的产量决策一样，其纳什均衡也不如各博弈方通过协商、合作得到的最佳结果，因此也是囚徒困境的一种。