第四章 不完全信息静态博弈

§1、不完全信息博弈和贝叶斯纳什均衡

§2、贝叶斯纳什均衡的应用举例

§1、不完全信息博弈和贝叶斯纳什均衡

一、 不完全信息博弈

二、 海萨尼转换

三、 策略式表述和贝叶斯纳什均衡

四、 贝叶斯博弈与混合策略均衡

一、 不完全信息博弈

- 不完全信息博弈情形：
  （1）参与人的支付函数依赖于自然的选择

  例如：在房地产商开发博弈中，若市场需求是不确定的，即为一不完全信息博弈。

  （2）某一参与人的支付函数是其他参与人私人信息（类型）的函数

  市场进入博弈模型

一、 不完全信息博弈

（1）房地产开发——不完全信息静态博弈模型

自然以P的概率选择高需求

		开发商B 开发	开发商B 不开发
开发商A	开发	2，2	4，0
	不开发	0，4	0，0

自然以1-P的概率选择低需求

		开发商B 开发	开发商B 不开发
开发商A	开发	－1，－1	1，0
	不开发	0，1	0，0

一、 不完全信息博弈

自然以p的概率选择高需求

		开发商B 开发	开发商B 不开发
开发商A	开发	3p－1，3p－1	1＋3p，0
	不开发	0，1＋3p	0，0

当p＞1/3时，（开发，开发）是双方的占优策略均衡；当p⩽1/3时，有两个纯策略纳什均衡：（开发，不开发）和（不开发，开发），和一个混合策略纳什均衡：双方都以(1+3p)/2的概率选择开发。

一、 不完全信息博弈

（2）市场进入的不完全信息博弈模型

		在位者 高成本 默许	在位者 高成本 斗争	在位者 低成本 默许	在位者 低成本 斗争
进入者	进入	40，50	-10，0	30，80	-10，100
	不进入	0，300	0，300	0，400	0，400

- 在完全信息条件下，在位者知道进入者的成本函数。

  若在位者是高成本，则当进入者进入时在位者的最优选择是默许，此时，潜在进入者将进入；

  若在位者是低成本，给定进入者进入时，在位者的最优选择是斗争。因此，潜在进入者将不进入。

一、 不完全信息博弈

不完全信息		在位者			
		高成本（p）		低成本（1-p）	
		默许	斗争	默许	斗争
进入者	进入	40，50	-10，0	30，80	-10，100
	不进入	0，300	0，300	0，400	0，400

* 若潜在进入者认为在位者是高成本的概率为p，低成本的概率为1-p，则潜在进入者

  选择进入的期望利润为：40p+(-10)(1-p)= 50p-10

  选择不进入的期望利润为：0

  因此，潜在进入者的最优选择是：若p＞0.2，则潜在进入者将选择进入，否则不进入。

二、海萨尼转换

* A 房地产开发博弈：开发商面临市场两种需求状态，由于需求不确定，通过自然决定某种市场需求状态（以概率表示）；
* B 市场进入博弈模型的换位思考：进入者与两个不同成本的在位者博弈；一般地，若在位者有N种可能的成本函数，则进入者似乎是在与N个不同的在位者博弈.
* 海萨尼引入了虚拟参与人——自然，自然首先行动，以此将不完全信息博弈转化为完全但不完美信息博弈（自然做出了它的选择（比如市场需求大还是小，在位者是高成本还是低成本），但其他参与人并不知道它的具体选择是什么，仅知道各种选择的概率分布。（此即海萨尼转换）
* 海萨尼转换已成为处理不完全信息博弈的标准方法。

二、海萨尼转换

博弈中的类型是指一个参与人所拥有的所有的个人信息，称为他的类型。

对于一个参与人而言，他自己知道自己是某种特定类型，而对于其他（全部或部分）参与人来说，则只知道他是若干种可能类型中的一种，而不能确切地知道他是哪一种特定类型。

如在市场阻挠博弈中，进入企业（参与人1）决定是否进入一个新的产业，只知道在位者有两种类型：可能是高成本也可能是低成本，但不知道在位企业（参与人2）到底是高成本还是低成本。而在位者知到自己是高成本还是低成本。假如进入者只有一种类型且是共同知识。这样，在该博弈中，在位者有两种类型，且是在位者的私人信息，而进入者只有一种类型，则该博弈是不完全信息博弈。不完全信息意味着，至少有一个参与人有多个类型（否则就成为完全信息）。

二、海萨尼转换

一般用 θ_i 来表示参与人i的一个特定的类型，用 Θ_i 表示参与人i所有可能类型的集合 $(\theta_i \in \Theta)$。

由于大多数博弈中，参与人的特征由支付函数完全确定，因而一般将参与人的支付函数等同于他的类型。通常假定，参与人i只知道自己的类型，但他知道其他参与人类型的概率分布。

二、海萨尼转换

* 假定$P(\theta_1, \cdots, \theta_n)$为所有参与人类型集$\Theta=\Theta_1\times\Theta_2\times\cdots\cdots\times\Theta_n$上的联合概率分布函数，它是所有参与人的共同知识。记$\theta_{-i}=(\theta_1, \cdots\theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \cdots, \theta_n)$表示除参与人i之外所有参与人的类型组合，记$p_i(\theta_{-i}|\theta_i)$表示参与人i的类型为 θ_i时参与人i关于其他参与人类型θ_{-i}的条件概率，它满足：

$$p_i(\theta_{-i} \mid \theta_i) = \frac{p(\theta_{-i}, \theta_i)}{p(\theta_i)} = \frac{p(\theta_{-i}, \theta_i)}{\sum_{-i\in\Theta_{-i}} p(\theta_{-i}, \theta_i)}$$

如果类型的分布是独立的，则有$P_i(\theta_{-i}|\theta_i) = P_i(\theta_{-i})$

三、 策略式表述和贝叶斯纳什均衡

* n人静态贝叶斯博弈的策略式表述包括：

  参与人的类型空间：$\Theta_1, \cdots, \Theta_n$

  条件概率：$p_1, \cdots, p_n$

  类型依存支付函数：$u_i(a_1, \cdots, a_n;\theta_i)$

  参与人i知道自己的类型$\theta_i\in\Theta_i$，条件概率p_i描述给定自己属于θ_i的情况下，参与人i有关其他参与人类型$\theta_{-i}\in\Theta_{-i}$的不确定性，$a_i(\theta_i)\in A_i(\theta_i)$表示参与人i的类型为$\theta_i$时所选择的行动（即参与人的行动是类型依存的）。
* 用$G=\{A_1, \cdots, A_n; p_1, \cdots, p_n; u_1, \cdots, u_n\}$代表上述博弈。当所有参与人的类型空间只包含一个元素时，不完全信息博弈就退化为完全信息博弈。

三、 策略式表述和贝叶斯纳什均衡

- 静态贝叶斯博弈的时间顺序是：

  首先，自然确定类型向量$\theta=(\theta_1, \cdots, \theta_n)$，$\theta_i$是参与人i的私人信息；

  其次，参与人同时选择行动（类型依存的）$a=(a_1, \cdots, a_n)$，$a_i \in A_i(\theta_i)$；

  最后，参与人得到各自的支付（类型依存的支付）$u_i(a_1, \cdots, a_n; \theta_i)$。
- 条件概率分布、类型依存的行动空间和类型依存的支付函数是共同知识。参与人只知道自己的类型，他将最大化其期望效用函数，后者定义为：

$$\sum_{\theta_{-i}} p_i(\theta_{-i} \mid \theta_i) u_i(a_i(\theta_i), a_{-i}(\theta_{-i}); \theta_i, \theta_{-i})$$

三、 策略式表述和贝叶斯纳什均衡

- **贝叶斯纳什均衡**：n人不完全信息静态博弈$G=\{A_1, \cdots, A_n; p_1, \cdots, p_n; u_1, \cdots, u_n\}$的纯策略贝叶斯纳什均衡是一个类型依存策略组合$a^*=(a_i^*(\theta_i))$，$i=1, 2, \cdots, n$。其中，$a_i^*(\theta_i)$满足：

$$a_i^*(\theta_i) \in \arg\max_{a_i(\theta_i) \in A_i(\theta_i)} \sum_{\theta_{-i}} p_i(\theta_{-i} \mid \theta_i) u_i(a_i(\theta_i), a_{-i}^*(\theta_{-i}); \theta_i, \theta_{-i})$$

- 贝叶斯纳什均衡的理性：每个人j都能准确地预测到具有类型θ_i的参与人i将选择$a_i^*(\theta_i)$。

四、贝叶斯博弈与混合策略均衡

- 在完全信息情况下，混合策略均衡解释通常被认为过于牵强，但海萨尼（1973）证明，完全信息情况下的混合策略均衡可以解释为不完全信息情况下纯策略均衡的极限。
- 混合策略纳什均衡的本质不在于参与人i随机地选择行动，而在于参与人i不能确定参与人j将选择什么纯策略，这种不确定性来自于参与人j类型的私人信息。

四、贝叶斯博弈与混合策略均衡

回顾性别战的混合策略NE

		丈夫	
		时装	足球
妻子	时装	2,1	0，0
	足球	0，0	1,3

完全信息性别战

- 妻子一以3/4的概率选时装，1/4概率选足球；
- 丈夫一以1/3的概率选时装，2/3概率选足球。
- 把我们已经了解的上述完全信息静态博弈假设为双方对对方支付的不完全了解(或者对对方类型如喜好的不完全了解)，从而引入信息的不完全性).

四、贝叶斯博弈与混合策略均衡

不完全信息性别战

		丈夫	
		时装	足球
妻子	时装	$2+t_w$,1	0，0
	足球	0，0	$1,3+t_h$

不完全信息性别战

- 、分别是妻子和丈夫的私人信息，并且在区间[0，x]上独立均匀分布（ x 可以理解为一个很小的正数）。不完全信息博弈表示为

$$G=\{A_w, A_h; T_w, T_h; p_w, p_h; u_w, u_h\}$$

四、贝叶斯博弈与混合策略均衡

不完全信息性别战

- 考虑如下策略：
- 妻子在tw 超过某临界值w，即tw ＞ w时，选择时装，否则选足球；丈夫在th 超过某临界值h，即th ＞ h时，选择足球，否则选时装
- 上述策略中，妻子选时装的概率
- pw(时装)＝（x−w）/x，
- 选足球的概率 pw(足球)＝ w/x；
- 丈夫选足球的概率ph(足球) ＝ （x−h）/ x，
- 选时装的概率ph(时装)=h/x。

四、贝叶斯博弈与混合策略均衡

不完全信息性别战

妻子的临界值策略和收益

时装$(x-w)/x$，得益$\frac{h}{x}(2+t_w)+\frac{x-h}{x}\times 0=\frac{h}{x}(2+t_w)$

足球w/x，得益$\frac{h}{x}\times 0+\frac{x-h}{x}\times 1=\frac{x-h}{x}$

丈夫的临界值策略和收益

足球$(x-h)/x$，得益$\frac{w}{x}(3+t_h)+\frac{x-w}{x}\times 0=\frac{w}{x}(3+t_h)$

时装h/x，得益$\frac{x-w}{x}1+\frac{w}{x}\times 0=\frac{x-w}{x}$

四、贝叶斯博弈与混合策略均衡

当且仅当$\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{x}}(2+t_w)>\frac{x-h}{x}$时，即$t_w>\frac{x}{h}-3$,妻子选择时装是最优的；

当且仅当$\frac{\mathrm{w}}{\mathrm{x}}(3+t_h)>\frac{x-w}{x}$时，即$t_h>\frac{x}{w}-4$,丈夫选择足球是最优的；

因此,$\frac{x}{h}-3=w,\frac{x}{w}-4=h$,从而解得

$w=\frac{-3+\sqrt{9+3x}}{2},h=\frac{-6+2\sqrt{9+3x}}{3}$

妻子选时装:$1-\frac{-3+\sqrt{9+3x}}{2x}$,

丈夫选足球:$1-\frac{-6+2\sqrt{9+3x}}{3x}$

§2 、贝叶斯纳什均衡的应用举例

一、不完全信息古诺模型

二、拍卖问题

（1）一级密封价格拍卖（招标）

（2）双方叫价拍卖

一、 不完全信息古诺模型

- Cournot模型：
- 在不完全信息古诺模型中，参与人的类型是成本函数。
- 设每一企业i分别有不变的单位成本c_i。为简单起见，我们假设：

企业1的单位成本c_1是共同信息，企业2的单位成本c_2是其私人信息，它有高成本c_2^H和低成本c_2^L两种情形，设低成本的概率为p，它是双方的共同知识。

一、 不完全信息古诺模型

- 给定企业2知道企业1的成本时，企业2将最大化其利润函数：

$\pi_2=q_2(a-c_2-q_1-q_2)$，

其中$c_2=c_2^H$或c_2^L依赖于企业2的实际成本。

由此可得企业2的反应函数为：

$q_2^*(q_1, c_2)=(a-c_2-q_1)/2$

它不但依赖于企业1的产量q_1，而且依赖于自己的成本c_2。

分别记q_2^L、q_2^H为企业2在低成本和高成本下的最优反应产量，分别为：

$q_2^*(q_1, c_2^L)=(a-c_2^L-q_1)/2$　　$q_2^*(q_1, c_2^H)=(a-c_2^H-q_1)/2$

一、 不完全信息古诺模型

- 企业1将最大化自己的期望利润函数：

$E\pi_1=q_1(a-c_1-q_1-q_2^L)*p+q_1(a-c_1-q_1-q_2^H)*(1-p)$

由此可求得企业1的最优反应函数为：

$q_1^*=[a-c_1-pq_2^L-(1-p)q_2^H]/2=(a-c_1-Eq_2)/2$

均衡意味着两个反应函数同时成立，由此得贝叶斯均衡为：

$q_1^*=[a-2c_1+pc_2^L+(1-p)c_2^H]/3$

$q_2^{L*}=(a+c_1-2c_2^L)/3-(1-p)(c_2^H-c_2^L)/6$

$q_2^{H*}=(a+c_1-2c_2^H)/3+p(c_2^H-c_2^L)/6$

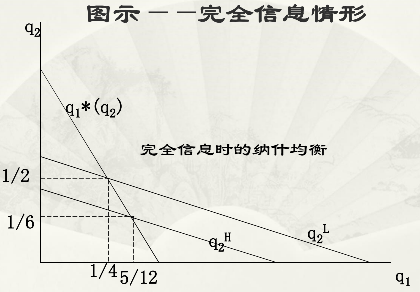
- 特别地，当a=2，$c_1=1$，$c_2^L=3/4$，$c_2^H=5/4$，p=1/2时，有$q_1^*=1/3$，$q_2^{L*}=11/24$，$q_2^{H*}=5/24$。

一、 不完全信息古诺模型

- 在完全信息情形下，当以上条件满足时，
  若企业2为低成本时，纳什均衡产量为 $q_1^*=1/4$，$q_2^{L*}=1/2$；企业2为高成本时，则企业1和2的纳什均衡产量分别为5/12和1/6。
- 在不完全信息下，产量分别为：$q_1^*=1/3$，$q_2^{L*}=11/24$，$q_2^{H*}=5/24$。
- 相对于完全信息，在不完全信息下，低成本企业的产量相对较低（11/24<1/2），高成本企业的产量相对较高（5/24>1/6）。原因：企业1对期望利润做出反应的结果。
- 企业2为低成本时，应提高产量，但是它的低成本不为企业1准确知道，因此企业2要生产比完全信息时稍低的产量才是最优的，同理可推知高成本的情形。

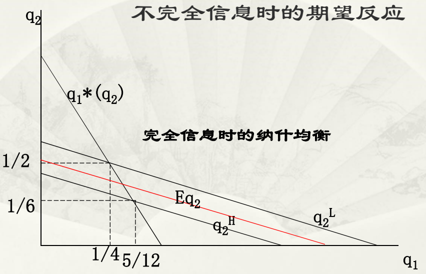
一、 不完全信息古诺模型

图示——完全信息情形



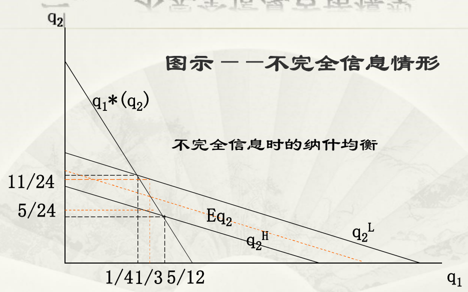
一、 不完全信息古诺模型

不完全信息时的期望反应



一、 不完全信息古诺模型

图示——不完全信息情形



思考：在不完全信息情形下，两企业的产量有何变化？

二、拍卖问题

（1）一级密封价格拍卖（最高价格密封出价拍卖）

规则：每个参与人分别提交自己的出价，但不知道别人的出价。出价最高的获得物品，并按此价格付给卖者。

（2）二级（次高）价格密封出价拍卖（维克瑞拍卖）

规则：每个参与人分别提交自己的出价，但不知道别人的出价。出价最高者获得物品，并按所有出价中的次高价格付钱给卖者。

（3）双方叫价拍卖

规则：在这种拍卖中，潜在的买者和卖者同时开价，卖者提出要价（卖者知道，买者不知道），买者提出出价（买者知道，卖者不知道），拍卖商然后选择成交价格p清算市场：所有要价低于p的卖者卖出，所有出价高于p的买者买入。

二、拍卖问题

（4）最高价格公开出价拍卖（英国式拍卖）

规则：每个参与人可自由地提高自己的出价。如果没有买者再提高自己的出价，则出价最高的获得物品，并按此价格付给卖者。

（5）降价式拍卖（荷兰式拍卖）

规则：卖者宣布一个要价，然后不停地降低这一价格，直到一个买者让他停止要价，并在当前叫停的价格上买下物品。

(1)、一级密封价格拍卖（招标）

若先考虑只有两个投标人，i = 1,2。令$s_i \geq 0$ 是投标人i的出价，θ_i 为拍卖物品对投标人i的价值。假定θ_i 只有i自己知道（因而是投标人i的类型），但两投标人都知道θ_i独立地取自定义在区间[0，1]上的均匀分布函数。投标人i的支付如下：

$$u_i(s_i,s_j;\ \theta_i)=\begin{cases}\theta_i-s_i & s_i>s_j\\ (\theta_i-s_i)/2, & s_i=s_j\\ 0, & s_i<s_j\end{cases}$$

（这里假定如果两投标人出价相同，拍卖品在两人之间随机地分配，但这个假设不重要，因为在连续分布的情况下，相同出价的概率为0）假定投标人i 的出价 $s_i(\theta_i)$是其价值 θ_i 的严格递增可微函数。显然，$s_i > 1 \geq \theta_i$不可能是最优的，因为没有人愿意付出比物品的价值本身更高的价格。

(1)、一级密封价格拍卖（招标）

因为博弈是对称的，就只需考虑对称的均衡出价战略：$s=s^*(\theta)$ 即投标人的出价（战略）是自己价值（类型）的函数。两个投标人采用同样的函数f（即可以是任意的函数形式，如线性函数等），并假设这一函数是递增可微的，并设其反函数为g(即当投标人选择s时他的价值是 $g(s)$)，　　则投标人i 的期望得益为：

$$u_i=(\theta_i-s_i)P\{s_i>s_j)=(\theta_i-s_i)P\{s_i>f(\theta_i)\}$$
$$=(\theta_i-s_i)P\{\theta_j<g(s_i)\}=(\theta_i-s_i)g(s_i)$$

期望得益函数的第一项 (θ_i-s_i) 是给定赢的情况下投标人i 的净所得，第二项 $P\{s_i>s_j\}$ 是赢的概率，j为另一个投标人。由于出价相同的概率为0，所以两投标人出价相同时谁赢并不影响结果。

(1)、一级密封价格拍卖（招标）

因此，投标人i 面临的问题是：

$$\max_{s_i} u_i=(\theta_i-s_i)P\{s_i>s_j\}=(\theta_i-s_i)g(s_i)$$

最优化投标人i的一阶条件是：$-g(s_i)+(\theta_i-s_i)g'(s_i)=0$

由此可解出投标人i对对手j采用f的最优反应函数，由于对称贝叶斯均衡中每个投标人的战略是相同的，因此，取函数f应该处处满足一阶条件，则有：$-g[f(\theta_i)]+[\theta_i-f(\theta_i)]g'[f(\theta_i)]=0$

由于f和g互为反函数，所以有$g[f(\theta_i)]=\theta_i$ 及 $g'[f(\theta_i)]=1/f'(\theta_i)$

可得：　$-\theta_i+\dfrac{\theta_i-f(\theta_i)}{f'(\theta_i)}=0$　一阶线性微分方程

解此常数微分方程可得：　$\theta_i f(\theta_i)=\dfrac{\theta_i^2}{2}+k$

式中的k为积分常数。由于每个投标人不会以高于自己的价值进行投标，因此 $f(\theta_i)\leq\theta_i$，同时$f(\theta_i)$ 在任何时候都不应小于0，

故可得到k为0。

(1)、一级密封价格拍卖（招标）

则结果是，拍卖的对称贝叶斯均衡战略为：

$$s_i^*=\theta_i/2$$

同理，　对投标人j也可得到相同的结论，即：$s_j^*=\theta_j/2$

这就是说，在只有两个投标人时，这个博弈的贝叶斯均衡是，每个投标人的出价是其实际价值的一半：在均衡情况下，被拍卖品归评价最高的投标人所有，这从资源配置的角度讲是有效的，但卖者只得到买者价值的一半。对比之下，如果信息是完全的，买者之间的竞争将使卖者得到买者价值的全部。

可见，在只有两个投标人的一级密封价格拍卖中，每个投标人的最优战略是以自己价值的一半出价，投标人这时没有“说真话”。

可以证明，投标人出价与实际价值的差距随投标人的增加而递减。一般地，假定有n个投标人，每个投标人的价值 θ_i 具有独立的、相同的定义在[0, 1]区间上的均匀分布，如果价值为 θ_i 的投标人i 出价s_i，则投标人i的期望得益函数为：

$$u_i=(\theta_i-s_i)\prod_{j\neq i}P(s_i>s_j)=(\theta_i-s_i)g^{n-1}(s_i)$$

最优化的一阶条件为：$-g^{n-1}(s_i)+(\theta_i-s_i)(n-1)g^{n-2}g'(s_i)=0$

进一步可写成：$-g[f(\theta_i)]+[\theta_i-f(\theta_i)](n-1)g'[f(\theta_i)]=0$

解此微分方程可得：　$f(\theta_i)=\dfrac{n-1}{n}\theta_i$　　即：$s_i^*=\dfrac{n-1}{n}\theta_i$

显然，s_i^* 随着n的增加而增加。特别地，当 $n\to\infty$

$s_i^*\to\theta_i$ 。即投标人越多，卖者得到的价格越高；当投标人趋于无穷时，卖者几乎得到买者价值的全部，也即投标人这时会倾向于“讲真话”。因此，让更多人参加竞标是卖者的利益所在。

(2)、双方叫价拍卖

与一级密封价格拍卖和二级密封价格拍卖不同的是，双方叫价拍卖中的参与人是卖者和买者，而在一级密封价格拍卖和二级密封价格拍卖中的参与人是不同的买者，卖者只是制定拍卖规则。在卖者和买者都有私人信息时，则产生了双方叫价拍卖。

在双方叫价拍卖中，潜在的卖者和买者同时开价，卖者提出要价，买者提出出价，拍卖商然后选择成交价格p清算市场：所有要价低于p的卖者卖出，所有出价高于p的买者买入；在价格p下的总供给等于总需求。

（2）、双方叫价拍卖

查特金和萨缪尔森（Chatterjee and Samuelson 1983)建立了一个简单的双方叫价拍卖模型，在他们的模型里，一个买者和一个卖者决定是否交换一单位的商品。卖者提供该商品的成本（或该商品对卖者的价值）是c，该商品对买者的价值是v，这里， $c\in[0,1]$, $v\in[0,1]$。卖者和买者同时选择要价和出价，分别为 $p_s\in[0,1]$ 和 $p_b\in[0,1]$ ；如果 $p_s\le p_b$，双方在 $p=(p_s+p_b)/2$ 上成交；如果 $p_s>p_b$，没有交易发生。这样，如果 $p_s\le p_b$，卖者的效用是 $u_s=(p_s+p_b)/2-c$，买者效用是 $u_b=v-(p_s+p_b)/2$；如 $p_s>p_b$ 卖者和买者的效用均为0。

（2）、双方叫价拍卖

这种交易规则与我国证卷交易市场的电子自动成交撮合系统的交易规则很相似，差别只是证券交易的买方和卖方都不止一个，而是有成千上万个，一个买方或一个卖方的报价不能与某一个卖方或买方成交时，还能与另外的卖方或买方成交。

如果信息是完全的，即c 和 v 是共同知识，这是一个纳什需求博弈。如假定 v > c，这个完全信息有连续的纯战略、帕累托有效均衡：卖者和买者开出相同的价格 $p_s=p_b=p\in(c,v)$ 双方都得到正的剩余。如果任何一方想更为贪婪（卖者要价高于p或买者出价低于p），交易不会发生。此外还有无效率的均衡：卖者要价高于v，买者出价低于c，因而每一方都不认真开价。

如果信息是不完全的，即只有卖者知道c，只有买者知道v（因而c是卖者的类型，v是买者的类型）。假定c和v在[0,1]上均匀分布，分布函数P(.)是共同知识。

在这个贝叶斯博弈中，卖者的战略（要价）Ps是c的函数Ps（c）；买者的战略（出价）Pb是v的函数Pb（v）。战略组合 $[p_s^*(c),p_b^*(v)]$ 是一个贝叶斯均衡，如果下列两条件成立：

1、卖者最优：对所有的 $c\in[0,1], p_s^*(c)$ 是下列最优化问题的解：

$$\max_{p_s}\{\frac{1}{2}(p_s+E[p_b(v)|p_b(v)\ge p_s])-c\}\ \mathrm{Prob}\{P_b(v)\ge p_s\}$$

其中 $E[p_b(v)|p_b(v)\ge p_s]$

是给定卖者要价低于买者出价的条件下，卖者预期的买者的出价。

2、买者最优：对所有的 $v\in[0,1], p_b^*(v)$ 是下列最优化问题的解：

$$\max_{p_b}\{v-\frac{1}{2}(p_b+E[p_s(c)|p_b\ge p_s(c)])\}\ \mathrm{Prob}\{P_b\ge p_s(c)\}$$

其中 $E[p_s(c)|p_b\ge p_s(c)]$

是给定卖者要价低于买者出价的条件下，买者预期的卖者的出价。

（2）、双方叫价拍卖

这个博弈有许多贝叶斯均衡。只要 P_b、P_s的函数形式的值及它们的概率分布同时满足上述两个最大化条件即可。因此，若不加任何条件限制的讨论该博弈的贝叶斯纳什均衡，或者是想找出全部的贝叶斯纳什均衡都没有什么意义。

首先假设是下列线性战略的均衡：

$$p_s(c)=\alpha_s+\beta_s c$$

$$p_b(v)=\alpha_b+\beta_b v$$

因为v在[0,1]上均匀分布，因此pb在 $[\alpha_b,\alpha_b+\beta_b]$ 上均匀分布。因此有：

$$\mathrm{Prob}\{p_b(v)\ge p_s\}=\mathrm{Prob}\{\alpha_b+\beta_b v\ge p_s\}$$

$$=\mathrm{Prob}\{v\ge\frac{p_s-\alpha_b}{\beta_b}\}=\frac{\alpha_b+\beta_b-p_s}{\beta_b}$$

$$E[p_b(v)|p_b(v)\ge p_s]=\frac{\frac{1}{\beta_b}\int_{p_s}^{\alpha_b+\beta_b}xdx}{Porb\{p_b(v)\ge p_s\}}=\frac{1}{2}(\alpha_b+\beta_b+p_s)$$

将上述等式代入卖者的目标函数，得：

$$\max_{p_s}\{\frac{1}{2}[p_s+\frac{1}{2}(p_s+\alpha_b+\beta_b)]-c\}\frac{\alpha_b+\beta_b-p_s}{\beta_b}$$

最优化一阶条件意味着：$p_s=\frac{1}{3}(\alpha_b+\beta_b)+\frac{2}{3}c$

该结论说明，如果买者选择线性战略，那么，卖者的最优反应也是线性的。

（2）、双方叫价拍卖

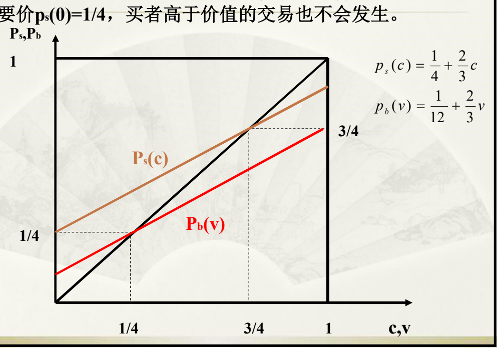
类似的，得买者的一阶条件： $p_b=\frac{1}{3}\alpha_s+\frac{2}{3}v$

解两个一阶条件得均衡线性战略为：

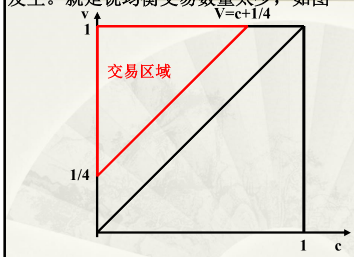
$$p_s(c)=\frac{1}{4}+\frac{2}{3}c$$

$$p_b(v)=\frac{1}{12}+\frac{2}{3}v$$

在均衡条件下，当c>3/4，卖者的要价$p_s=1/4+2c/3$低于成本，但高于买者的最高出价$p_b(1)=1/12+2/3=3/4$，因此卖者低于成本出售的情况不会出现；类似的，当v<1/4，买者出价高于其价值，但低于卖者的最低要价$p_s(0)=1/4$，买者高于价值的交易也不会发生。



在均衡情况下，当只当$\alpha_b+\beta_b v\geq\alpha_s+\beta_s c$，或者说 $v\geq c+1/4$，买卖双方才会交易。事后效率要求当只当$v\ \geq\ c$时交易就应该发生。就是说均衡交易数量太少，如图



以上讨论的是双方拍卖博弈的线性战略均衡。这个博弈还有一些其它的贝叶斯均衡。特别地，如同完全信息情况下一样，双方不认真出价$P_s=1$和$P_b=0$是一个均衡。

（2）、双方叫价拍卖

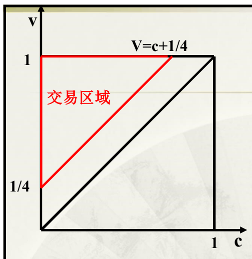
还存在一个在单一价格 $p\in[0,1]$ 上交易的连续均衡：

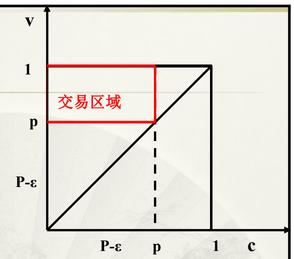
卖者要价p，如果c ≤ p；要价1，如果c > p；

买者出价p，如果v ≥ p；出价0，如果v<p。

给定卖者的战略(要价p或者1)，买者的选择只是在价格p上是否交易，因此，当v ≥ p时出价p实现交易；当v<p时出价0不进行交易是买者的最优选择。

类似的，给定买者的战略（出价p或者1），当c ≤ p时要价p；当c > p时要价1(要最高价格）是卖者的最优战略。均衡结果如下图所示





将上面两图比较，就发现最有价值的交易（c=0，v=1）在两个均衡中都会出现。但单一价格均衡错过一些有价值的交易如（c=0，V=p-c），同时又实现了一些仅仅值得进行的交易（如c=P-ε，v=p+ε）。对比之下，线性战略错过了所有v<c+1/4的交易，但实现了所有v-c ≥ 1/4的交易。从最大化交易净收益的角度讲，线性战略均衡优于单一价格均衡。

（2）、双方叫价拍卖

梅耶森和沙特威托（Myerson and Sattertwaite，1983）证明，在均匀分布的情况下，线性战略均衡比任何其它贝叶斯均衡产生的净剩余都高。这意味着，在双方拍卖博弈中，没有任何贝叶斯均衡能使得有且仅有帕累托有效的交易（v ≥c）一定出现。