第五章 不完全信息动态博弈

§1精练贝叶斯纳什均衡

§2信号博弈

§1精练贝叶斯纳什均衡

- 在不完全信息动态博弈中，至少有一个博弈参与者对博弈的结构、博弈参与者类型、博弈收益等信息不完全了解。
- 博弈参与者的行动存在先后顺序。
- 与不完全信息静态博弈类似，可以通过海萨尼转换将不完全信息动态博弈转化为完全但不完美信息动态博弈。

§1精练贝叶斯纳什均衡

（一）多节点信息集和不完美信息动态博弈的表示

用博弈树表示完全且完美信息的动态博弈，其中博弈树上的每个节点就是一个独立的决策节，表示参与人在该时点对此前的博弈过程有完全的了解。

而在不完全信息动态博弈中，“自然”首先选择参与人的类型，相应的参与人知道自己的类型，其他参与人不知道；在自然的选择之后，参与人开始序贯行动，后行为者能观测到先行为者的行动，但无法观测到先行为者的类型，从而产生不完美信息，对此，我们在博弈树上用多节点的信息集来反映。

§1精练贝叶斯纳什均衡

不完全信息动态博弈的基本思路：

1、“自然”首先选择参与人的类型，参与人自己知道，其他参与人不知道，但参与人类型的概率分布（也称为“先验信念”）是公共知识；

2、在自然行动以后，参与人开始行动，参与人的行动有先有后，后行动者能观测到先行动者的行动，但不能观测到先行动者的类型。

3、后行动者可以通过观察先行动者所选择的行动来推断或修正对其类型的先验信念（这是由于：参与人的行动是类型依存的，每个参与人的行动都传递着有关自己类型的某种信息。但是，先行动者预测到自己的行动将被后行动者所利用，也会设法选择传递对自己最有利的信息，避免传递对自己不利的信息），从而形成后行动者的后验信念。

4、因此，博弈过程不仅是参与人选择行动的过程，而且是参与人不断修正信念的过程。精练贝叶斯纳什均衡是完全信息动态子博弈精炼纳什均衡和不完全信息静态博弈贝叶斯纳什均衡的结合。

§1精练贝叶斯纳什均衡

考虑如下完全不完美信息动态博弈

参与者1在3个行动中进行选择——L、M及R。如果参与者1选择R，则博弈结束。如果参与者1选择了L或M，则参与者2就会知道1没有选择R（但不清楚1是选择了L还是M），并在或L’或R’两个行动中进行选挥，博弈随之结束。

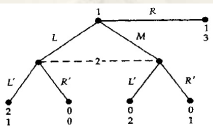


图 4.1.1

		参与者 2 L′	参与者 2 R′
参与者 1	L	2,1	0,0
	M	0,2	0,1
	R	1,3	1,3

图 4.1.2

纳什均衡(L，L’）、和(R，R’），也是子博弈精炼纳什均衡（因为没有子博弈）。然而，(R，R’）却明显要依赖于一个不可信的威胁：如果博弈进入参与者2的信息集，L’严格优于R‘，选择R’不是序贯理性的；因此参与者1不会由于2威胁他将在其后的行动中选择R'，而去选择R。

§1精练贝叶斯纳什均衡

对动态博弈进行分析，可信性问题始终是一个中心问题，一个理想的均衡必须是排除了所有不可信的威胁和许诺的。

对于不完全信息动态博弈，由于子博弈精炼均衡同样未能排除不可信的威胁和许诺，我们需要对其进一步强化（即加强对条件的要求），并把强化后的子博弈精炼纳什均衡称为精炼贝叶斯纳什均衡，简称为精炼（完美）贝叶斯均衡。

因此，用更为广义的后续博弈的概念来代替子博弈的概念。前面我们已经定义过的子博弈必须开始于单节点信息集，并且不能分割信息集，与之不同的是“后续博弈”是指从任何信息集（不论是单节点的还是包含多节点的）开始的动态博弈的后续部分。

§ 1精练贝叶斯纳什均衡

❖ 精炼贝叶斯纳什均衡四条要求

为使均衡概念得到进一步强化，以排除上例中像(R，R’）的子博弈纳什均衡，要附加以下两个要求。

要求1：在每一个信息集上，轮到行动的参与人必须对博弈进行到该信息集中各个决策节点的可能性大小有一个推断(belief)。对于非单节点信息集，推断就是在信息集中关于不同决策节点的一个概率分布；对于单节点的信息集，参与者的推断就是博弈到达此单一决策节点的概率等于1。(每一个参与人的信息集上有一个概率分布)

要求2：给定参与人的推断，参与人的策略必须满足序贯理性(sequentially rationally)的。即在每一信息集中，给定轮到行动的参与人在此信息集中的推断，以及其他参与人的后续策略（指从给定信息集开始的参与人在后续博弈中的完备的行动计划)，该参与人的行动必须是最优的。(给定概率分布和其他参与人的选择，每个参与人的战略是最优的)

❖ 用精炼贝叶斯均衡剔除不可置信威胁(R，R’）

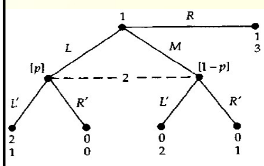


图 4.1.3

要求1：每一个参与人的信息集上各节点有一个推断(概率分布)；

要求2：给定参与人的推断,参与人的策略必须满足序贯理性。

要求1意味着如果博弈的进行达到参与者2的非单节信息集，则参与者2必须对具体到达哪一个节(也就是参与者1选择了L还是R)有一个推断。这样的推断就表示为到达两个节的概率p和1-p

给定参与者 2 的推断，选择 R'的期望收益就等于 $p\cdot 0+(1-p)\cdot 1=1-p$

而选择 L'的期望收益等于 $p\cdot 1+(1-p)\cdot 2=2-p$

由于对任意的 p，都有 $2-p>1-p$，要求 2 就排除了 2 选择 R'的可能性，从而，在本例中简单要求每一参与者持有一个推断，并且在此推断下选择最优行动，就足以使我们排除不合理的均衡(R,R')。

因此，这个博弈的唯一的精炼贝叶斯均衡是((L，L’；p=1)

§ 1精练贝叶斯纳什均衡

❖ 精炼贝叶斯纳什均衡另外两条要求

要求 1 和 2 只保证了参与者持有推断，并对给定的推断选择最优行动，但并没有明确这些推断是否是理性的。为进一步约束参与者的推断，我们需要区分处于均衡路径上的信息集和不处于均衡路径上的信息集。

定义 对于一个给定的扩展式博弈中给定的均衡，如果博弈根据均衡战略进行时将以正的概率达到某信息集，我们称此信息集处于均衡路径之上(on the equilibrium path)。反之，如果博弈根据均衡战略进行时，肯定不会达到某信息集，我们称之为处于均衡路径之外的信息集(off the equilibrium path)。(其中“均衡”可以是纳什、子博弈精炼、贝叶斯以及精炼贝叶斯均衡)

要求3： 在处于均衡路径之上的信息集中，推断由贝叶斯法则及参与人的均衡战略给出。（概率分布是使用贝叶斯法则从最优战略和观测到的行动得到的（在可能的情况下）

§ 1精练贝叶斯纳什均衡

❖ 贝叶斯法则

贝叶斯法则：是概率统计中的应用所观察到的现象对有关概率分布的主观判断（即先验概率）进行修正的标准方法。

在日常生活中，当面临不确定性时，在任何一个时点上，我们对某件事情的可能性有一个判断。然后，我们会根据新的信息来修正这个判断。统计学上，修正之前的判断称为“先验概率”（prior probability），修正之后的判断称为“后验概率”（posterior probability）。贝叶斯法则正是人们根据新的信息从先验概率到后验概率的基本方法。

例：市场进入博弈

		II 高成本 A 默许	II 高成本 A B阻挠20%	II 低成本 默许	II 低成本 阻挠100%
I	进入	40,50	-10,0	30,100	-10,140
	不进入	0,300	0,300	0,400	0,400

现就市场进入一例进行分析，假设Ⅰ在打算进入之前对II的类型及分布概率一无所知，但Ⅰ知道，如果是高成本型A则阻挠(B)概率是20%，如果是低成本型则阻挠概率是100%，那么他将采取怎样的战略呢

$\boxed{\mathrm{P}(B/A)=0.2}$ $\boxed{\mathrm{P}(B/\bar{A})=1}$

博弈开始时，Ⅰ认为Ⅱ属于高成本型A的概率是70%。$\boxed{\mathrm{P}(A)=0.7}$

因此，Ⅰ认为自己在进入市场时受到阻挠的概率是：$\boxed{\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(B/A)\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B/\bar{A})\mathrm{P}(\bar{A})}$

0.7×0.2＋0.3×1＝0.44

当Ⅰ进入市场时，确实是A阻挠，根据贝叶斯法则，Ⅰ认为Ⅱ为高成本型A的概率变为：

（0.7×0.2）/0.44=0.32 $\boxed{\mathrm{P(A}/B)=\mathrm{P(A}B)/\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(B/A)\mathrm{P(A)}/\mathrm{P}(B)}$

根据这一新概率，Ⅰ估计自己再进入市场时受到阻挠的概率变为：

0.32×0.2＋0.68×1＝0.744

如果Ⅰ再次试探，Ⅱ又进行了阻挠，根据贝叶斯法则，Ⅰ认为II属于高成本型的概率变为：

（0.32×0.2）/0.744=0.086

这样，随着一次次试探及阻挠，对A的判断逐渐变化，越来越倾向将Ⅱ判断为低成本型企业。

§ 1精练贝叶斯纳什均衡

❖ 贝叶斯法则

我们假定参与人的类型是独立分布的。假定参与人 i 有 K 个可能的类型，有 H 个可能的行动。我们用 θ^k 和 a^h 分别代表一个特定的类型和一个特定的行动(因为我们现在只考虑一个参与人，我们省略了下标 i)。假定 i 属于类型 θ^k 的先验概率是 $p(\theta^k)\geqslant 0$，$\sum_{k=1}^{K}p(\theta^k)=1$；给定 i 属于 θ^k，i 选择 a^h 的条件概率为 $p(a^h|\theta^k)$，$\sum_h p(a^h|\theta^k)=1$。那么，i 选择 a^h 的边缘概率是：

$$\mathrm{Prob}\{a^h\}=p(a^h\mid\theta^1)p(\theta^1)+\cdots+p(a^h\mid\theta^K)p(\theta^K)=\sum_{k=1}^{K}p(a^h\mid\theta^k)p(\theta^k)$$

即参与人 i 选择行动 a^h 的“总”概率是每一种类型的 i 选择 a^h 的条件概率 $p(a^h|\theta^k)$ 的加权平均，权数是他属于每种类型的先验概率 $P(\theta^k)$。

❖ 贝叶斯法则

我们现在要问的问题是：假如我们观测到 i 选择了 a^h，i 属于类型 θ^k 的后验概率是多少？

我们用 $\mathrm{Prob}\{\theta^k|a^h\}$ 代表这个后验概率，即给定 a^h 的情况下 i 属于类型 θ^k 的概率。根据概率公式：

$$\mathrm{Prob}(a^h,\theta^k) = p(a^h|\theta^k)p(\theta^k) = \mathrm{Prob}\{\theta^k|a^h\}\mathrm{Prob}\{a^h\}$$

即 i 属于 θ^k 并选择 a^h 的联合概率等于 i 属于 θ^k 的先验概率乘以 θ^k 类型的参与人选择 a^h 的概率，或等于 i 选择 a^h 的总概率乘以给定 a^h 情况下 i 属于 θ^k 的后验概率。因此，我们有：

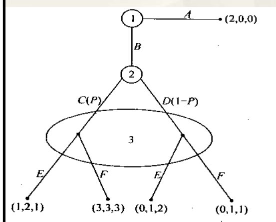
$$\mathrm{Prob}\{\theta^k\,|\,a^h\} = \frac{p(a^h\,|\,\theta^k)p(\theta^k)}{\mathrm{Prob}\{a^h\}} = \frac{p(a^h\,|\,\theta^k)p(\theta^k)}{\sum_{j=1}^{K} p(a^h\,|\,\theta^j)p(\theta^j)}$$ （贝叶斯法则）

$\mathrm{Prob}\{\theta^k\,|\,a^h\}$ 代表这个后验概率，即给定 a^h 的 情况下，i 属于 类型 θ^k 的概率

❖ 精炼贝叶斯纳什均衡四条要求

要求4： 对处于均衡路径之外的信息集，推断由贝叶斯法则以及可能情况下的参与者的均衡战略决定。（对精炼贝叶斯均衡再精炼）

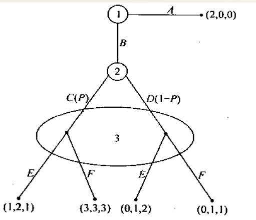
分析要求4的作用



这是一个由三个参与人各行动一次构成的三阶段不完美信息动态博弈。

参与人1在第一阶段从A和B中作出选择，如果他选择A，则博弈结束，如果他选择B，则轮到参与人2在第二阶段在C和D之间作出选择，在第三阶段由参与人3在E和F之间进行选择。

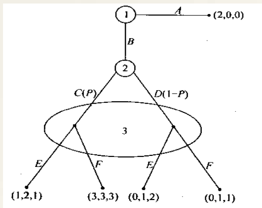
其中参与人1的行动能被参与人2和3观测到，但参与人2的行动却不能被参与人3观测到。



分别用P和$(1-P)$表示参与人3推断参与人2选择C和D的概率，那么参与人3选E的期望支付： P×1＋(1—P)×2＝2—P 选F的期望支付：P×3＋(1—P)×1＝1＋2P因此，当P＜1/3时，他会选择E，当P＞1/3时，他会选择F，当P＝1/3时，他可选择E或F或混合策略。

那么，他所推断的P究竟是这三种情况中的哪一种情况呢？这取决于他对参与人2的最优选择的判断。

对参与人2来说，D是相对于C的严格下策，所以参与人2的合理选择必定是C，因此P＝1＞1/3，所以参与人3的选择是F。参与人1在第一阶段对第二阶段和第三阶段参与人2和3的决策思路是清楚的，所以他知道如果自己选择B的话，支付将是3，比选择A的支付2大，因此，他会选择B。



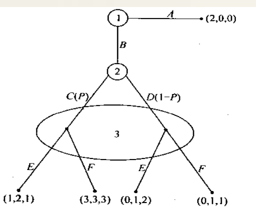
这样，我们就得到一个策略组合(B, C, F)与参与人3的推断P＝1. 从上面的分析可知，(B, C, F；P＝1)是完全符合要求1到要求3的，并且，由于该策略组合下不存在均衡路径之外的信息集，因此要求4也就自动满足，从而我们说(B, C, F；P＝1)是该博弈的完美贝叶斯纳什均衡。

下面考虑策略组合(A，C，E)及相应的推断P＝0.

首先，(A，C，E；P＝0)是一个纳什均衡，因为任何一个参与人都不可能通过单独改变自己的策略使自己的支付得到改善；

其次，用要求1到要求3来衡量它也是满足的。但是，它却不是子博弈完美的，因为该博弈只有惟一的子博弈，并且根据上面的分析，它的惟一的纳什均衡是(C，F)，而不是(C，E)。

§1精练贝叶斯纳什均衡



产生这一现象的原因就在于要求4没有满足。在(A，C，E；P＝0)下，均衡路径就是第一阶段参与人1选择A，博弈结束，参与人2和3的策略C和E及推断P＝0都不在均衡路径上，即存在均衡路径之外的信息集，对于参与人3在该信息集上的推断P＝0，要求1到要求3没有任何的限制，而根据要求4，参与人3的推断决定于参与人2的合理选择：如果参与人2选择C，则参与人3的推断必须是P＝1，如果参与人2选择D，则参与人3的推断必须是P＝0。

纳什均衡(A，C，E；P＝0)中，恰恰就是参与人3的推断P＝0与参与人2的选择C不相符合。因此，以要求4来衡量，纳什均衡(A，C，E；P＝0)是不合理的均衡(主要是推断不合理)，应该予以剔除。

§1精练贝叶斯纳什均衡

条件1：在每一个信息集上，轮到行动的参与人必须对博弈进行到该信息集中各个决策节点的可能性大小有一个推断。

条件2：给定参与人的推断和其他参与人的选择，每个参与人的战略是最优的

条件3：在处于均衡路径之上的信息集中，推断由贝叶斯法则及参与人的均衡战略给出

条件4：对处于均衡路径之外的信息集，推断由贝叶斯法则以及可能情况下的参与者的均衡战略决定。

§1精练贝叶斯纳什均衡

上述四个要求中，条件2要求参与人在一个特定信息集上的行动依赖于参与人在该信息集的推断，而条件3或条件4又要求参与人的推断依赖于博弈树更上端的参与人的行动，但条件2又要求这些在博弈树上更上端的参与人的行动部分地依赖于随后参与人的行动。

这样的**循环**依赖意味着通过博弈树进行逆推归纳求解，精炼贝叶斯纳什均衡将不像在完全且完美信息动态博弈中确定子博弈精炼纳什均衡那样顺利（一般情况而言）。

事实上，条件1到条件4为我们提供了确定精炼叶斯纳什均衡的思路和方法，我们以这四个条件为依据和标准并结合具体的特点来分析确定精炼贝叶斯纳什均衡。

§1精练贝叶斯纳什均衡

精炼贝叶斯均衡定义为：

精炼贝叶斯均衡是一个策略组合 $s^*(\theta)=(s_1^*(\theta_1),\cdots,s_n^*(\theta_n))$ 和一个后验概率组合 $\tilde{p}=(\tilde{p}_1,\cdots,\tilde{p}_n)$，满足：

1、精炼条件：对于所有的参与人 i，在每一个信息集 h，$s_i^*(s_{-i},\theta_i)\in\arg\max_{s_i}\sum\tilde{p}_i(\theta_{-i}\mid a_{-i}^h)u_i(s_i,s_{-i},\theta_i)$

2、贝叶斯法则：$\tilde{p}_i(\theta_{-i}\mid a_{-i}^h)$ 是使用贝叶斯法则从先验概率 $p_i(\theta_{-i}\mid\theta_i)$ 观测到的 a_{-i}^h 和最优策略 s_{-i}^* 得到的。

§2信号博弈

- 信号博弈(signaling games)

信号博弈是两个参与者之间的非完全信息动态博弈：信号发送者(Sender，S)和信号接收者(Receiver，R)，博弈的时间顺序如下：

1. 自然根据特定的概率分布 $p(t_i)$，从可行的类型集 $T=\{t_1,\cdots t_n\}$ 中赋予发送者某种类型 t_i，这里对所有的 i，$p(t_i)>0$ 并且 $p(t_1)+\cdots+p(t_I)=1$；
2. 发送者观测到 t_i，然后从可行的信号集 $M=\{m_1,\cdots,m_j\}$ 中选择一个发送信号 m_j；
3. 接收者观测到 m_j（但不能观测到 t_i），然后从可行的行动集 $A\{a_1,\cdots,a_k\}$ 中选择一个行动 a_k；
4. 双方收益分别由 $u_s(t_i,m_j,a_k)$ 和 $u_r(t_i,m_j,a_k)$ 给出。

在许多应用中，可行集合 T、M 及 A 为实数轴上的区间，而不是上面考虑的有限集。而允许可行的信号集依赖于自然赋予的类型，可行的行动集又依赖于发送者选择的信号的情况也十分容易理解。

§2信号博弈

发送者战略

1.如果自然赋予类型t_1,选择信号m_1；如果自然赋予类型t_2，选择信号m_1；
2.如果自然赋予类型t_1,选择信号m_1；如果自然赋予类型t_2，选择信号m_2；
3.如果自然赋予类型t_1,选择信号m_2；如果自然赋予类型t_2，选择信号m_1；
4.如果自然赋予类型t_1,选择信号m_2；如果自然赋予类型t_2，选择信号m_2；

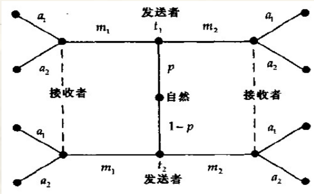


图 4.2.1

接收者战略

1.如果发送者选择信号m_1，选择行动a_1；如果发送者选择信号m_2，选择行动a_1；
2.如果发送者选择信号m_1，选择行动a_1；如果发送者选择信号m_2，选择行动a_2；
3.如果发送者选择信号m_1，选择行动a_2；如果发送者选择信号m_2，选择行动a_1；
4.如果发送者选择信号m_1，选择行动a_2；如果发送者选择信号m_2，选择行动a_2；

§2信号博弈

信号博弈战略可以划分为三类

（1）**混同(pooling)战略**：指信号发送者在**不同类型下都发出相同的信号**。因而，信号接收者无法从观测到的信号中得到新的信息，也就无法对先验概率进行修正。

（2）**准分离(semi-separating)战略**：指信号发送者对**某些类型选择特定的信号，而对另一些类型则随机地选择信号**。这时，信号接收者观测到某些信号时能够准确地判断出发送者的类型，而观测到另外某些信号时尽管不能完全判断出发送者的类型，但是能够据以修正自己的先验概率。

（3）**分离(separating)战略**：指信号发送者针对**不同的类型完全选择不同的信号**。这类策略中，信号准确地表现类型，接收者可以通过所观测到的信号准确地判断出发送者的类型。

§2信号博弈

- 信号传递博弈精练贝叶斯均衡

信号要求 1 在观测到 M 中的任何信号 m_j 之后，接收者必须对哪些类型可能会发送 m_j 持有一个推断。这一推断用概率分布 $u(t_i\mid m_j)$ 表示，其中对所求 T 中的 t_i，$u(t_i\mid m_j)\geqslant 0$ 且

$$\sum_{t_i\in T}u(t_i\mid m_j)=1.$$

给定发送者的信号和接收者的推断，再描述接收者的最优行为便十分简单，把要求 2 应用于接收者可以得到：

信号要求 2R 对 M 中的每一 m_j，并在给定哪些类型可能发送 m_j 的推断 $u(t_i\mid m_j)$ 的条件下，接收者的行动 $a^*(m_j)$ 必须使接收者的期望效用最大化。亦即 $a^*(m_j)$ 为下式的解

$$\max_{m_j\in M}U_S(t_i,m_j,a^*(m_j))$$

$$a^*(m_j)=\arg\max_{a_k}EU_R[t_i,m_j,a_K(m_j)]$$

$$EU_R[t_i,m_j,a_K(m_j)]=\sum_{t_i\in T}u_R[t_i,m_j,a_k(m_j)]\cdot\mu(t_i|m_j)$$

§ 2信号博弈

要求 2 同样适用于发送者，但发送者有完全信息(及由此而来的单纯推断)，并且只在博弈的开始时行动，于是要求 2 相对比较简单：对给定的接收者的战略，发送者的战略是最优反应：

信号要求 2S 对 T 中的每一 t_i，在给定接收者战略 $a^*(m_j)$ 的条件下，发送者选择的信号 $m^*(t_1)$ 必须使发送者的效用最大化。亦即 $m^*(t_i)$ 为下式的解

$$\max_{m_j \in M} U_S(t_i, m_j a^*(m_j)) .$$

最后，给定发送者的战略 $m^*(t_i)$，令 T_j 表示选择发送者信号 m_j 的类型集合，也就是说，如果 $m^*(t_i)=m_j$，则 t_i 为 T_j 中的元素。如果 T_j 不是空集，则对应于信号 m_j 的信息集就处于均衡路径之上；否则，任何类型都不选择 m_j，其对应的信息集则处于均衡路径之外。对处于均衡路径上的信号，把要求 3 运用于接收者的推断，可以得到：

§ 2信号博弈

信号要求 3 对每一 M 中的 m_j，如果在 T 中存在 t_i 使得 $m^*(t_i)=m_j$，则接收者在对应于 m_j 的信息集中所持有的推断必须决定于贝叶斯法则和发送者的战略：

$$u(t_i \mid m_j) = \frac{p(t_i)}{\sum_{t_i \in T_j} p(t_i)} .$$

$$p(t_i \mid m_j) = \frac{p(m_j \mid t_i) \cdot p(t_i)}{p(m_j)}$$

$$p(m_j) = \sum_{i=1}^{m} p(m_j \mid t_i) \cdot p(t_i)$$

定义 信号博弈中一个纯战略精炼贝叶斯均衡为一对战略 $m^*(t_i)$ 和 $a^*(m_j)$ 以及推断 $u(t_i \mid m_j)$，满足信号要求(1)，(2R)，(2S)及(3)。

对于信号发送者，如果发送者的战略是混同的或准分离的、分离的，我们就称均衡分别为混同的或准分离的、分离的均衡。

§ 2信号博弈

分离均衡 (separating equilibrium)：不同类型的发送者(参与人 1)以 1 的概率选择不同的信号，或者说，没有任何类型选择与其他类型相同的信号。在分离均衡下，信号准确地揭示出类型。假定 $K=J=2$(即只有两个类型、两个信号)，那么，分离均衡意味着：如果 m^1 是类型 θ^1 的最优选择，m^1 就不可能是 θ^2 的最优选择，并且，m^2 一定是类型 θ^2 的最优选择。即：

$$u_1(m^1, a^*(m), \theta^1) > u_1(m^2, a^*(m), \theta^1);$$
$$u_1(m^2, a^*(m), \theta^2) > u_1(m^1, a^*(m), \theta^2);$$

因此，后验概率是：

$$\tilde{p}(\theta^1 \mid m^1) = 1, \tilde{p}(\theta^1 \mid m^2) = 0,$$
$$\tilde{p}(\theta^2 \mid m^1) = 0, \tilde{p}(\theta^2 \mid m^2) = 1$$

注：θ表示类型，$m(\theta)$ 是参与人1的类型依存信号战略，$a(m)$ 是参与人2的行动战略

§ 2信号博弈

混同均衡 (pooling equilibrium)：不同类型的发送者(参与人 1)选择相同的信号，或者说，没有任何类型选择与其他类型不同的信号，因此，接收者(参与人 2)不修正先验概率(参与人 1 的选择没有信息量)。假定 m^j 是均衡战略，那么，

$$u_1(m^j, a^*(m), \theta^1) \geq u_1(m, a^*(m), \theta^1)$$
$$u_1(m^j, a^*(m), \theta^2) \geq u_1(m, a^*(m), \theta^2)$$
$$\tilde{p}(\theta^k \mid m^j) = p(\theta^k)$$

§ 2信号博弈

准分离均衡 (semi-separating equilibrium)：一些类型的发送者(参与人 1)随机地选择信号，另一些类型的发送者选择特定的信号。假定类型 θ^1 的发送者随机地选择 m^1 或 m^2，类型 θ^2 的发送者以 1 的概率选择 m^2，如果这个战略组合是均衡战略组合，那么：

$$u_1(m^1, a^*(m), \theta^1) = u_1(m^2, a^*(m), \theta^1);$$
$$u_1(m^1, a^*(m), \theta^2) < u_1(m^2, a^*(m), \theta^2);$$

§ 2信号博弈

$$\tilde{p}(\theta^1 \mid m^1) = \frac{\alpha \times p(\theta^1)}{\alpha \times p(\theta^1) + 0 \times p(\theta^2)} = 1;$$

$$\tilde{p}(\theta^1 \mid m^2) = \frac{(1-\alpha)p(\theta^1)}{(1-\alpha)p(\theta^1) + 1 \times p(\theta^2)} < p(\theta^1);$$

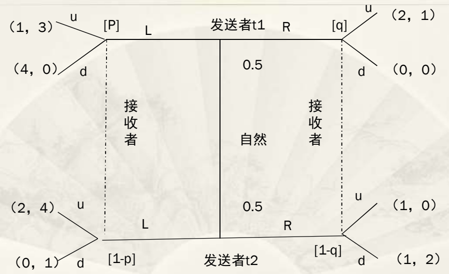
$$\tilde{p}(\theta^2 \mid m^2) = \frac{1 \times p(\theta^2)}{(1-\alpha)p(\theta^1) + 1 \times p(\theta^2)} > p(\theta^2)$$

就是说，如果参与人 2 观测到参与人 1 选择了 m^1，就知道参与人 1 一定属于类型 θ^1(因为类型 θ^2 不会选择 m^1)；如果观测到参与人 1 选择了 m^2，参与人 2 不能准确地知道参与人 1 的类型，但他会推断参与人 1 属于类型 θ^1 的概率下降了，属于类型 θ^2 的概率上升了(这里 α 是类型 θ^1 的参与人 1 选择 m^1 的概率)。

这说明，在接收者观察到m2时将加大对发送者为类型θ2的推断，而减小发送者为类型θ1的推断

§ 2信号博弈

具体例子



§ 2信号博弈

发送者有两个类型t1和t2，其信号集为（L, R）。因此，发送者有四个纯策略集合（L, L）, (L, R)，　(R, L)，　(R, R)．。第一个和第四个策略是混同策略，而2和3策略是分离策略。
接收者的行动空间为（u, d），因此，接收者也有四个纯策略，分别为（u, u），　(u, d)，　(d, u)，　(d, d)，第1和4是混同策略，2和3是分离策略。

在该信号博弈中，自然赋予每个类型的可能性是相同的，接收者在收到L信号后的信息集h(L)有两个结点，接收者的信念分别是p和1-p；在接受到R信号后的信息集h(R)也有两个结点，接收者的信念分别是q和1-q。

§ 2信号博弈

$$\mu(t_i|L)=\frac{p(L|t_i)\square p(t_i)}{p(L)}=\frac{p(L|t_i)}{p(L|t_1)+p(L|t_2)}$$

$$\mu(t_i|R)=\frac{p(R|t_i)\square p(t_i)}{p(R)}=\frac{p(R|t_i)}{p(R|t_1)+p(R|t_2)}$$

其中

$p=\mu(t_1|L)$，　$1-P=\mu(t_2|L)$，　$q=\mu(t_1|R)$，　$1-q=\mu(t_2|R)$

假设先给定各信息集中结点的概率p和q，我们先分析发送者和接收者的行为以及对这种后验信念的要求。

1）对于接收者

当他接收到信号L后，他的行动 a*(L)必须使得他的期望效用最大化。即a*(L)为下式的解：

$$a^*(L)\in\arg\max_{a_k} EU_R[t_i,L,a_k(L)]$$

§ 2信号博弈

因为

$$\max_{a_k} EU_R[t_i,L,a_k(L)]=\max\{p\times 3+(1-p)\times 4,\ p\times 0+(1-p)\times 1\}$$
$$=\max\{4-p,1-p\}=4-p$$

其中{4-p, 1-p}中前一个元素表示采用行动u的期望收益，后一个表示采用行动d的收益。因此，　a*(L)=u，对0到1之间的任意p均成立。
当他接收到信号R后，他的行动 a*(R)必须使得他的期望效用最大化。即a*(R)为下式的解：

$$a^*(R)\in\arg\max_{a_k} EU_R[t_i,L,a_k(R)]$$

因为

$$\max_{a_k} EU_R[t_i,L,a_k(R)]=\max\{q+(1-q)\times 0,\ q\times 0+(1-q)\times 2\}$$
$$=\max\{q,2-2q\}=\begin{cases}q, & q\ge\frac{2}{3}\\ 2-2q, & q<\frac{2}{3}\end{cases}$$

§ 2信号博弈

由此可以得到

$$a^*(R)=\begin{cases}u, & q\ge\frac{2}{3}\\ d, & q<\frac{2}{3}\end{cases}$$

2）对于发送者

当自然赋予他类型为t1，在给定接收者的最优行动a*(mj)的条件下，发送者选择的信号m*(t1)，是其自身的效用最大化。即m*(t1)为下式的解：

$$m^*(t_1)\in\arg\max_{m_j} U_S[t_1,m_j,a^*(m_j)]$$

§ 2信号博弈

因为

$$\max_{m_j} U_S[t_1,m_j,a^*(m_j)]=\begin{cases}\max\{U_s(t_1,L,u),U_s(t_1,R,u)\}, & q\ge\frac{2}{3}\\ \max\{U_s(t_1,L,u),U_s(t_1,R,d)\}, & q<\frac{2}{3}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\max\{1,2\}=2, & q\ge\frac{2}{3}\\ \max\{1,0\}=1, & q<\frac{2}{3}\end{cases}$$

由此可以得到

$$m^*(t_1)=\begin{cases}R, & q\ge\frac{2}{3}\\ L, & q<\frac{2}{3}\end{cases}$$

§2信号博弈

当自然赋予他类型为t2，在给定接收者的最优行动a*(mj)的条件下，发送者选择的信号m*(t2)，是其自身的效用最大化。即m*(t2)为下式的解：

$$m^*(t_2) \in \arg\max_{m_j} U_s[t_2, m_j, a^*(m_j)]$$

因为

$$\max_{m_j} U_s[t_2, m_j, a^*(m_j)] = \begin{cases} \max\{U_s(t_2, L, u), U_s(t_2, R, u)\}, & q \ge \frac{2}{3} \\ \max\{U_s(t_2, L, u), U_s(t_2, R, d)\}, & q < \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \max\{2,1\} = 2, & q \ge \frac{2}{3} \\ \max\{2,1\} = 2, & q < \frac{2}{3} \end{cases}$$

由此可以得到 $m^*(t_2) = L$

§2信号博弈

综合上述分析，有

$$\text{信号接收者} \begin{cases} a^*(L) = u \\ a^*(R) = \begin{cases} u, & q \ge \frac{2}{3} \\ d, & q < \frac{2}{3} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{信号发送者} \begin{cases} m^*(t_1) = \begin{cases} R, & q \ge \frac{2}{3} \\ L, & q < \frac{2}{3} \end{cases} \\ m^*(t_2) = L \end{cases}$$

§2信号博弈

于是，我们得到均衡的初步精炼分析结果：

（1）策略组合（(L,L)，(u,d)）和信念q<2/3，与信念p无关。

（2）策略组合（(R,L)，(u,u)）和信念q>=2/3，与信念p无关。

其次，对以上可能的均衡按照要求3和要求4进行分析。

（1）对于第一个策略组合（(L,L)，(u,d)），有

$$p(L|t_1) = 1, \quad p(R|t_1) = 0, \quad p(L|t_2) = 1, \quad p(R|t_2) = 0$$

这时，发出L后的信息集达到，按照要求3应有

§2信号博弈

$$\mu(t_1|L) = \frac{p(L|t_1) \cdot p(t_1)}{p(L|t_1) \cdot p(t_1) + p(L|t_2) \cdot p(t_2)} = \frac{1 \times 0.5}{1 \times 0.5 + 1 \times 0.5} = \frac{1}{2}$$

$$\mu(t_2|L) = \frac{p(L|t_2) \cdot p(t_2)}{p(L|t_1) \cdot p(t_1) + p(L|t_2) \cdot p(t_2)} = \frac{1 \times 0.5}{1 \times 0.5 + 1 \times 0.5} = \frac{1}{2}$$

即当局中人采用混合策略（L,L），剧中人2无任何有用信念，仍保留了自然给予的信念。该结果满足前面对精炼的要求，信号R后的信息集未达到。按照要求4，信念可以取任意值，但应满足可能情况下局中人的均衡策略。根据前面对均衡中的信念分析，q<=2/3和p是任意的，则有

$$q = \mu(t_1|R) \le \frac{2}{3}, \quad 1 - q = \mu(t_2|R) \ge \frac{1}{3}$$

综合以上分析，可以得到第一个精炼贝叶斯纳什均衡为：策略组合（(L,L)（u，d））和信念p=1/2, q<=2/3

§2信号博弈

（2）对于第二个策略组合（(R,L)，(u,d)），有

$$p(L|t_1) = 0, \quad p(R|t_1) = 1, \quad p(L|t_2) = 1, \quad p(R|t_2) = 0$$

这时，两个信念集均达到，按照要求3应有

$$\mu(t_1|L) = \frac{p(L|t_1) \cdot p(t_1)}{p(L|t_1) \cdot p(t_1) + p(L|t_2) \cdot p(t_2)} = 0$$

$$\mu(t_2|R) = \frac{p(L|t_1) \cdot p(t_1)}{p(R|t_1) \cdot p(t_1) + p(R|t_2) \cdot p(t_2)} = 1$$

同理有

$$\mu(t_2|L) = 1, \quad \mu(t_2|R) = 0$$

可以得到第二个精炼贝叶斯纳什均衡为：策略组合（(R,L)（u，d））和信念p=0, q=1.