《博弈论》课程报告评述

第一次报告：《量子博弈》

第二次报告：《互补商品最优定价与广告投入》

姓名：黄真　　　　　学号：2013202464

一、文献报告

文献 1：量子博弈

1、背景介绍

经典博弈理论涉及多人决策问题的，两个或两个以上的个体在做出理性的决定，会影响一个人的福利。在经济学和社会科学领域中，从企业的冲突到国家的外交政策的制定，都与这个问题息息相关。

而就物理学而言，博弈论和量子通信理论之间存在着密切的联系，而在一个特定的物理环境中，2 个遥远的玩家的任务就是尽可能多地获取信息。现代博弈论是由冯诺依曼和摩根斯坦发现的，但这一理论的结构形式和数学结构更好的被纳什得到了理解和延伸。这个理论把参与博弈的人假定成思考和表现符合理性的理性行为者，在理性的范围内，取得最大的收益。

在这里我们通过给出在分析和决策问题中常用的量子结构中的数学工具，来规范量子博弈这个概念。我们通过利用希尔伯特空间实现从经典到量子领域的延伸。在希尔伯特空间之下，他们不是一组离散的线性叠加。而是给每个决策者一个可数的连续的一组战略选择。

就性别战这个经典的博弈分析而言，量子博弈的应用将给这个博弈呈现出新的特征。而传统的经典博弈理论，不会做出令人耳目一新的决策。

2、经典博弈论

在这个部分我们将对完全信息静态博弈的基本规则进行介绍。两个参与者同时（静态）做出行动并且根据他们相互的决策有所收益，这种简单决策问题包含在这种受限制的博弈中。不仅如此，每个参与者完全掌握他的对手们的收益情况（完全信息）。不属于此类的博弈称作动态博弈（参与者按一定顺序行动，就像下棋）或者不完全信息博弈（一些参与者不完全知道他的对手们的收益函数，就像拍卖）。

每个标准形式的博弈都应该阐明：

1. 参与者数目 $i=1\cdots N$；

2.一系列策略｛s｝，包含每个参与者的策略空间 ψ_i。

3.支付函数$\$_i=\$_i(s_1,s_2\cdots s_N)$，根据对手所选择的策略分配给第 i 名参与者一个确切的数字。

我们来分析一个两个人的完全信息静态博弈，这个博弈通常被称为“性别战争”。一个

常常发生的问题，一个女人 Alice，和一个男人 Bob，正在尝试决定周六晚上干什么：Alice 乐于去看戏剧，而 Bob 像在电视上看足球比赛，并且他们两个都乐于在一起而不是分开。

		Bob	
		O	T
Alice	O	(α,β)	(γ,γ)
	T	(γ,γ)	(β,α)

α >β>γ

Alice：概率 p 选择看剧，1-p 选择看球；

Bob：概率 q 选择看剧，1-q 选择看球；

支付函数：

$$\bar{\$}_A(p,q) = p[q(\alpha-2\gamma+\beta)+\gamma-\beta] + \beta + q(\gamma-\beta),$$

$$\bar{\$}_B(p,q) = q[p(\alpha-2\gamma+\beta)+\gamma-\alpha] + \alpha + p(\gamma-\alpha).$$

3、量子博弈

在这个部分不仅仅要考虑离散的有限的一系列策略，还要考虑他们之间的线性组合，通过把希尔伯特空间的框架赋予到策略空间。

（1）.不像经典博弈理论，我们必须人为设定一个属于希尔伯特空间的初始量子规定。通过两个参与者的两个概率空间获得，二者标准正交，每个向量都由经典纯策略构成。

（2）.每个参与者可以通过做转换操纵自己的初始向量来得到一个合适的结果响亮，这代表着两个参与者将使用的量子策略。在这个方法中，由于状态与策略有关，操作者与在博弈中做的转换有关系。

（3）.每个参与者所期望的支付必须通过将最终的量子结果投影到空间ψ中的基向量平方取模求得，然后加上通过适当的支付系数相乘得到的数字。

（4）.每个参与者最终需要使用通过最终的量子策略得到的经典纯策略。

4、因子分解的量子博弈

让我们通过给出其正交基向量来定义 Alice 和 Bob 夫妻博弈的四维 Hilbert 共同策略空间

$$\mathscr{S} = \mathscr{S}_A \otimes \mathscr{S}_B$$

$$\mathscr{S} = \mathscr{S}_A \otimes \mathscr{S}_B = (|OO\rangle, |OT\rangle, |TO\rangle, |TT\rangle),$$

方程中第一个位置留给 Alice 的状态，第二个位置六个 Bob 的状态，这些向量允许记录 Alice 和 Bob 的所有纯策略。例如[x|O〉 +y|T〉]⊗[w|O〉 +z|T〉]

让我们用 A 和 B 两个单一幺模矩阵来代表 A 和 B 可能采取的策略（第一个向量用|O〉表示，第二个用|T〉表示）

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ -b^\star & a^\star \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} c & d \\ -d^\star & c^\star \end{bmatrix},\quad \begin{cases} aa^\star+bb^\star=1 \\ cc^\star+dd^\star=1 \end{cases}.$$ 方程（5.2）

由于状态 r|O〉 +s|T〉 总可以由|O〉 或 |T〉 变换得到，本程序与初始状态的选择无关。然后，我们可以从|OO〉,|OT〉,|TO〉,|TT〉 四个状态中的一个开始，这便使计算变得简单。

通过对 5.2 的变形，我们得到最后一个常见的量子策略，该策略取决于 a,b,c,d 四个系数

$$|\psi_{\text{fin}}\rangle = A\otimes B\,|\psi_{\text{in}}\rangle = ac|OO\rangle - ad^\star|OT\rangle - b^\star c|TO\rangle + b^\star d^\star|TT\rangle.$$ 方程（5.3）

现在可以讲最终状态投射到$\mathscr{S}=\mathscr{S}_A\otimes\mathscr{S}_B$上并应用第三量子规则来计算两个博弈人的预期收益函数。

通过对 5.2 的变形，我们得到最后一个常见的量子策略，该策略取决于 a,b,c,d 四个系数

$$\bar{\$}_A=|a|^2[(\alpha+\beta-2\gamma)|c|^2-\beta+\gamma]+\beta+(\gamma-\beta)|c|^2,\quad \bar{\$}_B=|c|^2[(\alpha+\beta-2\gamma)|a|^2-\alpha+\gamma]+\alpha+(\gamma-\alpha)|a|^2,$$

方程（5.4）

现在 A 和 B 可以分别找出哪些|a|2 和|c|2 满足纳什均衡,此时量子博弈论仍满足 3.2。通过重复计算，和容易发现满足条件的值符合以下方程式

$$(|a|^2=0,\,|c|^2=0)\quad\text{or}\quad(|a|^2=1,\,|c|^2=1)\quad\text{or}\quad\left(|a|^2=\frac{\alpha-\gamma}{\alpha+\beta-2\gamma},\,|c|^2=\frac{\beta-\gamma}{\alpha+\beta-2\gamma}\right).$$

方程（5.5）

综上所述,我们可以看到能够进行因子分解的量子策略在解决夫妻博弈混合策略问题方面可以得到完全相同的结果。对于量子形式的探索特别是对于苛因子分解策略的探索并不能改进经典理论：由于没有办法比较不同的纳什均衡，博弈结果依然是未知的。然而，量子博弈论包含经典博弈的一部分，量子可因子分解策略对应于经典混合策略。

5、量子博弈论的密度矩阵法

在开始研究纠缠态量子策略之前,我们展示过如何使用密度矩阵代替状态向量来重写整个形势发展，并且引入一种新的转换，这样做能起到简化运算的作用，同时要牢记，可因子分解的量子策略的最终结果是一致的。于是我们定义一个统一的 Hermitian 算符替换向量|O〉和 |T〉

$$\begin{cases} C|O\rangle = |T\rangle \\ C|T\rangle = |O\rangle \end{cases}, \quad C^{\dagger} = C = C^{-1}.$$

方程（6.1）

现在我们假设，每个玩家可以通过减少总密度矩阵 ρ in 的一部分来修改自己的策略，并以此来代表博弈的初始态，转变如下

$$\rho_{\text{fin}}^{A(B)} = [p\, I \rho_{\text{in}}^{A(B)} I^{\dagger} + (1-p)\; C \rho_{\text{in}}^{A(B)} C^{\dagger}].$$

方程（6.2）

这个操作可以解释为博弈者以 p 的概率选择 I 策略，以 1-p 的概率选择 C 策略，最终产生如下密度矩阵

$$\rho_{\text{fin}} = pq\, I_A \otimes I_B \rho_{\text{in}} I_A^{\dagger} \otimes I_B^{\dagger} + p(1-q) I_A \otimes C_B \rho_{\text{in}} I_A^{\dagger} \otimes C_B^{\dagger} + q(1-p) C_A \otimes I_B \rho_{\text{in}} C_A^{\dagger} \otimes I_B^{\dagger} + (1-p)(1-q) C_A \otimes C_B \rho_{\text{in}} C_A^{\dagger} \otimes C_B^{\dagger}$$

方程（6.3）

于是我们得到三个纳什均衡：对于($p^{\star}$=1, $q^{\star}$=1) 和 ($p^{\star}$=0, $q^{\star}$=0)对应

$$\rho_{\text{fin}} = |OO\rangle \langle OO| \rho_{\text{fin}} = |TT\rangle \langle TT|$$

第三种状态对应最终密度矩阵

$$\rho_{\text{fin}} = \frac{1}{\alpha+\beta-2\gamma}[(\alpha-\gamma)|O\rangle\langle O| + (\beta-\gamma)|T\rangle\langle T|] \otimes \frac{1}{\alpha+\beta-2\gamma}[(\beta-\gamma)|O\rangle\langle O| + (\alpha-\gamma)|T\rangle\langle T|]$$

总之，我们可以指出，在一定条件下我们能得到相同的博弈结果。

6、纠缠量子策略

在四和五中我们运用两种不同但等效的方法，可以得出运用可分解的量子策略，完全不改变我们用传统博弈论方法得到的两性之战博弈的结果。另一方面，只有我们向两个参与者的策略空间中添加更多的结构，我们才会得到新的结果。事实上，到目前为止我们还没有介绍量子博弈中的纠缠情况。我们会展现一个实时，在 Alice 和 Bob 参与的纠缠策略如何得到一个总是满足纳什均衡条件的结果。

由在上一部分中所展示的内容，我们可以限制我们自己处理与策略相关的密度矩阵，而不是与状态变量相关的，然后用等式（6.3）的变形，初始密度矩阵的选择是随机的，在纳什均衡对应的支付函数范围内，与初始状态完全无关。

我们开始假设 Alice 和 Bob 在下列纠缠条件下有自己的决定权

$|\psi_{\text{in}}\rangle = a|OO\rangle + b|TT\rangle \quad |a|^2 + |b|^2 = 1,$

（7.1）

运用联合密度矩阵

$\rho_{\text{in}} = |a|^2|OO\rangle\langle OO| + ab^*|OO\rangle\langle TT| + a^*b|TT\rangle\langle OO| + |b|^2|TT\rangle\langle TT|.$

（7.2）

运用等式（6.3），我们得到最终密度矩阵 ρ_{fin} 的表达，由参数 a,b,p 和 q 决定，通过等式（6.7），还有两参与者的预期收益。

$$\bar{\$}_A(p,q) = p[q(\alpha+\beta-2\gamma) - \alpha|b|^2 - \beta|a|^2 + \gamma] + q[-\alpha|b|^2 - \beta|a|^2 + \gamma] + \alpha|b|^2 + \beta|a|^2,$$
$$\bar{\$}_B(p,q) = q[p(\alpha+\beta-2\gamma) - \beta|b|^2 - \alpha|a|^2 + \gamma] + p[-\beta|b|^2 - \alpha|a|^2 + \gamma] + \beta|b|^2 + \alpha|a|^2.$$

(7.3)

然后，由下列两个不等式得出三个纳什均衡点）

$$\begin{cases} \bar{\$}_A(p^\star,q^\star) - \bar{\$}_A(p,q^\star) = (p^\star - p)[q^\star(\alpha+\beta-2\gamma) - \alpha|b|^2 - \beta|a|^2 + \gamma] \geq 0, \\ \bar{\$}_B(p^\star,q^\star) - \bar{\$}_B(p^\star,q) = (q^\star - q)[p^\star(\alpha+\beta-2\gamma) - \beta|b|^2 - \alpha|a|^2 + \gamma] \geq 0. \end{cases}$$

（7.4）

我们分别检验三个纳什均衡。

1. $p^\star_{(1)} = q^\star_{(1)} = 1$，在这种情况下，最初和最终的密度矩阵表示参与者的共同策略是相同的。预期收益为

$\bar{\$}_A(1,1) = \alpha|a|^2 + \beta|b|^2$

（7.5）

$\bar{\$}_B(1,1) = \beta|a|^2 + \alpha|b|^2$

（7.6）

2. $p^{\star}{}_{(2)}=q^{\star}{}_{(2)}=0.$，与这些数值对应的最终密度矩阵通过反转初始策略 ($\rho_{\rm fin}=C_A C_B \rho_{\rm in} C_B^{\dagger} C_A^{\dagger}$)得到，而相应的预期收益被证实会根据之前的事件发生互换。

$$\bar{\$}_A(0,0)=\beta|a|^2+\alpha|b|^2,$$

（7.7）

$$\bar{\$}_B(0,0)=\alpha|a|^2+\beta|b|^2$$

（7.8）

3.

$$p^{\star}_{(3)}=\frac{(\alpha-\gamma)|a|^2+(\beta-\gamma)|b|^2}{\alpha+\beta-2\gamma},\quad q^{\star}_{(3)}=\frac{(\alpha-\gamma)|b|^2+(\beta-\gamma)|a|^2}{\alpha+\beta-2\gamma}.$$

由于有条件 $\alpha>\beta>\gamma$，可以得出 $0<p^{\star}{}_{(3)}<1$ 和 $0<q^{\star}{}_{(3)}<1$.两参与者的预期收益是相同的且与博弈的参数无关

$$\bar{\$}_A(p^{\star}_{(3)},q^{\star}_{(3)})=\bar{\$}_B(p^{\star}_{(3)},q^{\star}_{(3)})=\frac{1}{\alpha+\beta-2\gamma}[\alpha\beta+(\alpha-\beta)^2|a|^2|b|^2-\gamma^2].$$ （7.9）

我们再找出博弈的三个纳什均衡，它们的预期收益有下列关系

$$\bar{\$}_{A(B)}(p^{\star}_{(3)},q^{\star}_{(3)})<\bar{\$}_{A(B)}(p^{\star}_{(1)},q^{\star}_{(1)}),\quad \bar{\$}_{A(B)}(p^{\star}_{(3)},q^{\star}_{(3)})<\bar{\$}_{A(B)}(p^{\star}_{(2)},q^{\star}_{(2)}).$$

（7.10）

（7.10）

这就意味着不论 Alice 还是 Bob 都更喜欢 $p^{\star}_{(1)}=q^{\star}_{(1)}=1$ or $p^{\star}_{(2)}=q^{\star}_{(2)}=0$ 而不喜欢第三种策略。虽然如此，但不能决定是选择第一种还是第二种，实际上

$$\bar{\$}_A(1,1)-\bar{\$}_A(0,0)=(\alpha-\beta)(|a|^2-|b|^2),$$

$$\bar{\$}_B(1,1)-\bar{\$}_B(0,0)=(\alpha-\beta)(|b|^2-|a|^2).$$

（7.11）

因此，当$|a|>|b|$，Alice 倾向于第一种纳什均衡，而 Bob 则倾向于第二种。相应的，若$|a|<|b|$,会发生相反的情况。然而有一种情况能让 Alice 和 Bob 做成相同的决定，这与初始状态有条件 $|a|=|b|$，i.e 有关，且

$$|\psi_{\rm in}\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}[|OO\rangle+|TT\rangle],\quad \rho_{\rm in}=\tfrac{1}{2}[|OO\rangle\langle OO|+|OO\rangle\langle TT|+|TT\rangle\langle OO|+|TT\rangle\langle TT|].$$

现在想找到这种特殊初始条件下的纳什均衡是非常复杂的。我们有：

$$(p^{\star}=0,q^{\star}=0)\Rightarrow\$_A=\$_B=\frac{(\alpha+\beta)}{2},$$

$$(p^{\star}=1,q^{\star}=1)\Rightarrow\$_A=\$_B=\frac{(\alpha+\beta)}{2},$$

$$(p^{\star}=\tfrac{1}{2},q^{\star}=\tfrac{1}{2})\Rightarrow\$_A=\$_B=\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{4}$$

（7.13）

两参与者预期收益相同的情况就是他们都使用了混合策略。实际上，我们可以通过舍弃那些给参与者带来较少收益的策略来确定一个唯一的纳什均衡：剩下的 p 和 q 的值代表博弈唯一的解，它会使两参与者都满意，相比之下，在可因式分解的策略情况下我们无法从三个等效的策略中选择一个。实际上，从等式（7.13），我们可以得出

$$\bar{\$}_{A(B)}(p^{\star}=0,q^{\star}=0)=\bar{\$}_{A(B)}(p^{\star}=1,q^{\star}=1)>\bar{\$}_{A(B)}(p^{\star}=1/2,q^{\star}=1/2).$$

$(p^{\star}=0, q^{\star}=0)$ 和 $(p^{\star}=1, q^{\star}=1)$的纠缠量子策略是相同的，就是精确的纠缠状态，

我们从下式开始：

$$|\psi_{\text{fin}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|OO\rangle + |TT\rangle].$$

（7.15）

因此我们得到了结果——（7.15）的状态表示策略的纠缠量子对满足了纳什均衡条件。这就是说，它表示最佳的理性选择在不考虑单方面误差的情况下是稳定的，并且比其他可能的纳什均衡给参与者提供更多的利益（比如 $p^{\star}=1/2, q^{\star}=1/2$）。

因此纠缠策略（7.15）可以得出量子形式的两性

7、总结

在这篇文章中，通过把策略扩展到希尔伯特空间上，传统的博弈理论可以被扩展到量子领域，所以可以把传统策略的线性组合通过传统意义上的量子力学形式表示出来。我们做出的最重要的假设，是把传统博弈理论的结果在可因子分解的量子策略条件下重新得出，就是每个参与者必须在他的状态变量下通过量子测度来选择他的策略。

文献 2：互补商品最优定价与广告投入

1、总体叙述

零售商和制造商是供应链管理中两个很重要的因素，研究两者之间的关系可以更深刻了解两者在市场中的经济表现，以及采用怎样的方式可以实现双方共赢。本文主要研究零售商和制造商在互补商品广告投入、定价上的博弈与合作，指出了博弈产生的原因，提出了可以采取的措施，并将不同决策组合的收益进行比较，通过研究，得出博弈对双方的影响，得出最佳合作策略。

供应链中的合作广告，已经成为营销实践的主要组成部分，是近年来不可或缺的一种产品分销合作机制。我们在对前人的合作广告理论研究进展加以综述的基础上，主要运用博弈论的理论与方法，对由制造商和零售商所组成的两级供应链中的合作广告计划问题进行了深入地研究，进而结合互补商品的特性，研究广告费分配和定价问题。

我们将注意力主要放在合作广告与产品定价问题上，分别考察了双寡头博弈和 Nash 合作博弈情形下制造商与零售商的最优广告及定价策略选择、双方最优利润及系统利润。

2、研究背景

众所周知，当今市场竞争的主流趋势不再是企业与企业之间的竞争，取而代之的是供应链与供应链之间整体实力的对抗。供应链中的每个成员企业突破传统企业组织的有形界限，将各自独特的广告资源优势联合起来并有效地加以整合，从而促进产品的生产销售和实现优势互补、风险分摊、利益共享，进而提高整条供应链的竞争能力。在这样的背景下，处于供应链上游的制造商实施全国性广告，而位于供应链下游节点处的零售商进行地方性广告，特别是制造商承诺对零售商地方性广告活动的部分或全部成本进行分担——即合作广告机制引起了人们广泛的兴趣，逐渐成为了实业界和学术界关注的新热点。

供应链上下游企业间的合作广告(或称纵向合作广告)在传统渠道营销计划中起着至关重要的作用，是近年来不可或缺的一种产品分销合作机制。合作广告作为一种有效的营销手段，它可以建立和维持品牌形象，提高品牌的知名度和美誉度以及顾客的忠诚度，让更多的消费者了解产品的价格、质量和性能等详细信

息，甚至改变消费者的个人偏好和情趣，从而促成消费者的品牌转换，即放弃其它企业的品牌转而购买该企业的品牌。事实上，合作广告被非常多的行业所采用，已经构成了制造商(或供应商、生产商等)与零售商(或经销商、分销商、代理商等)全面营销策略的主要组成部分。

3、问题分析

巨额的广告费用投资本身是一把双刃剑，既可能为企业创造出相当可观的收益，也可能会由于投资决策失误或具体运作不当等原因导致广告资金既无效率又无效果的利用，盲目而又高强度的广告投入也就成了吞噬企业资金的无底黑洞，使企业陷入万劫不复之困境。那么，企业在制定广告策略时所面临的一个关键问题就是在充分认识广告对产品销售额影响的基本规律的基础上，应当如何科学合理地分配广告预算，从而使得既定的广告投入获得最大化利润或者实现既定利润条件下的广告成本最小化。正是这一问题的日益重要性决定了它是本论文即将研究的主要内容。

此外，为制造商宣传和促销品牌的零售商的广告投入成本如何分摊已经成为制造商与零售商谈判中不可避免的一个主要议题。合作广告最初是零售商希望在不增加自身资金支出的情况下，为了扩大广告预算而向制造商寻求财务支持，进而发展起来的一种合作机制。

本文将运用博弈论的相关理论与模型，采用定性分析与定量分析相结合的方法，先后从确定需求和不确定需求两个视角出发，对制造商-零售商供应链中的合作广告计划问题逐步深入地展开研究，具体考察了合作广告费用与广告分担比例、互补商品资金投入比例问题。本文的研究丰富和拓展了当前的合作广告研究内容，其结论能为制造商与零售商各方在广告活动安排、博弈结构选择、存货与订货策略决定、合作广告方案设计以及管理层进行广告预算等方面的科学合理决策提供理论依据和实践指导。

4、模型阐述博弈

4.1 双寡头模型

本部分意图探讨传统的制造商为主导者而零售商为随从者的博弈情形。为了确定博弈结构的双寡头均衡,运用逆向归纳法,首先求解博弈第二阶段的反应函数。令 E(π)表示零售商在整个销售期内所获得的期望利润,并用 u 表示期望方

程式中的随机变量 ε ,那么零售商的最优化控制问题为

$$\underset{a,z}{Max}\,E(\pi_r)=\int_0^z\{py(a,n)u-wy(a,n)z+ry(a,n)\times[z-u]\}f(u)du+\int_z^{+\infty}[(p-w)y(a,n)z]$$

$$-sy(a,n)[u-z]\}f(u)du-(1-t)\bullet ea$$
$$=(p-w)y(a,n)u-y(a,n)[(w-r)\Lambda(z)+(p-w+s)\Theta(z)]-(1-t)\times ea \tag{5.8}$$

将 y(a,n)=α－βa^(－γ)n^(－δ) 代入式(5.8)中,容易验证, E(π)是一个分别关于 z 与 a 的凹函数。由零售商期望利润最大化的一阶条件：E(π)对 z 和 a 的一阶偏导数分别等于零得到

$$z^*=F^{-1}(\varphi),\text{其中 }\varphi=\frac{p-w+s}{p-r+s}\text{（下同）} \tag{5.9}$$

$$a^*=\left(\frac{n^{-\delta}\beta\gamma\Gamma}{e(1-t)}\right)^{\frac{1}{1+\gamma}} \tag{5.10}$$

$\Gamma=(p-w)u-(w-r)\Lambda(z^*)-(p-w+s)\Theta(z^*)$。

将式(5.9)和(5.10)代入式(5.5),制造商所面临的最优化问题如下:

$$\underset{0\le t\le 1,n}{Max}\,E(\pi_m)=(w-c)q-gn-t\times ea=(w-c)\left[\alpha-\beta\left(\frac{n^{-\delta}\beta\gamma\Gamma}{e(1-t)}\right)^{\frac{-\gamma}{1+\gamma}}n^{-\delta}\right]F^{-1}(\varphi)-gn-t\times e\left(\frac{n^{-\delta}\beta\gamma\Gamma}{e(1-t)}\right)^{\frac{1}{1+\gamma}} \tag{5.11}$$

令 $\partial E(\pi_m)/\partial t=0$ 和 $\partial E(\pi_m)/\partial n=0$,求解得到制造商最优广告分担率为

$$t^*=\begin{cases}\dfrac{(w-c)F^{-1}(\varphi)-\gamma\Gamma-\Gamma}{(w-c)F^{-1}(\varphi)-\gamma\Gamma} & \text{当 }\dfrac{(w-c)F^{-1}(\varphi)}{\Gamma}>1+\gamma\\ 0 & \text{其他}\end{cases} \tag{5.12}$$

制造商最优全国性广告水平为

$$n^*=\left[\beta\left(\frac{e}{\gamma}\right)^{\gamma}\left(\frac{\delta}{g}\right)^{1+\gamma}\left((w-c)F^{-1}(\varphi)-\gamma\Gamma\right)\right]^{\frac{1}{1+\gamma+\delta}} \tag{5.13}$$

将式(5.12)和(5.13)代入式(5.10),从而得到零售商最优地方性广告水平为

$$a^*=\left[\beta\left(\frac{g}{\delta}\right)^{\delta}\left(\frac{\gamma}{e}\right)^{1+\delta}\left((w-c)F^{-1}(\varphi)-\gamma\Gamma\right)\right]^{\frac{1}{1+\gamma+\delta}} \tag{5.14}$$

根据式(5.4),求得最优订货量

$$q^*=\left\{\alpha-\left[\beta\left(\frac{e}{\gamma}\right)^{\gamma}\left(\frac{g}{\delta}\right)^{\delta}\left((w-c)F^{-1}(\varphi)-\gamma\Gamma\right)^{-\gamma-\delta}\right]^{\frac{1}{1+\gamma+\delta}}\right\}F^{-1}(\varphi) \tag{5.15}$$

性质 1　由式(5.9)可知,剩余产品的残值越大,产品滞销所带来的损失就越小,零售商愿意保留的存货则越多;缺货给零售商造成的信誉损失越大,零售商的存货水平越高。

性质 2　由式(5.10)可知,制造商向零售商提供广告分担时的零售商广告水平要大于不提供广告支持(即 $t = 0$)时的对应值,并且它与制造商给予零售商的广告分担率正相关，而与制造商全国性广告负相关。

因而制造商可以综合利用分担率和全国性广告这两个指示器来诱导零售商提高地方性广告努力程度,双管齐下使其达到制造商所期望的水平,从而实现制造商自身利润的最大化。

性质 3　无论是双寡头主从博弈还是 Nash 合作博弈情形,制造商最优全国性广告水平与零售商最优地方性广告水平的比率为一常数,并且这一常数等于 $e\delta/g\gamma$

将式(5.9)、(5.12)、(5.13)和(5.14)一起分别代入式(5.8)和式(5.11),可以获得双寡头博弈结构下制造商与零售商最优期望利润分别为

$$E(\pi_m^*) = \alpha(w-c)F^{-1}(\varphi) - (1+\gamma+\delta)\left[\beta\left(\frac{e}{\gamma}\right)^{\gamma}\left(\frac{g}{\delta}\right)^{\delta}\times\left((w-c)F^{-1}(\varphi)-\gamma\Gamma\right)\right]^{\frac{1}{1+\gamma+\delta}} \tag{5.16}$$

$$E(\pi_r^*) = \alpha\Gamma - (1+\gamma)\Gamma\left[\beta\left(\frac{e}{\gamma}\right)^{\gamma}\left(\frac{g}{\delta}\right)^{\delta}\times\left((w-c)F^{-1}(\varphi)-\gamma\Gamma\right)^{-\gamma-\delta}\right]^{\frac{1}{1+\gamma+\delta}} \tag{5.17}$$

那么供应链整体最优期望利润为

$$E(\pi^*) = E(\pi_m^*) + E(\pi_r^*) \tag{5.18}$$

4.2 Nash 合作博弈情形

在许多行业尤其是消费品行业中,制造商与零售商的力量对比发生了根本性的变化，零售势力正在显著地从制造商手中向零售商那里转移，传统的非对称关系已不占主流，零售商拥有与制造商同等甚至更大的权力或地位，它们往往依靠所控制着的众多销售渠道来影响制造商的经营决策。其中，一个零售商对制造商市场绩效的最重要影响之一是对制造商产品的细分化。零售商控制了消费者可能期望的一些产品特性,零售商的商店信誉和形象的可能会反映出制造商产品的质量和形象。事实上，零售商通过大众喜闻乐见的地方性广告和其它销售努力诸如产品展销、个人推荐或者劝说等做法来向消费者提供足够的产品信息，从而影响

制造商产品的销售。零售商为消费者传递了制造商全国性广告努力和其他来源无法传递的有关产品可靠性、特性和使用方法的信息，零售商对消费者的购买决策有更大的影响。尽管制造商的全国性广告能引导消费者去考虑一种特别的品牌，然而零售商的地方性广告和销售努力能用来改变消费者的想法从而抵消甚至消除全国性广告的效果。零售商能取消为某一特别品牌所进行的促销活动包括地方性广告，以影响消费者去购买其它品牌。显然，随着零售商对产品细分化影响能力的增强，零售商对制造商的讨价还价能力也在增加。

基于这种新的市场结构，我们意图考察制造商与零售商之间的协同合作关系。

4.3 最优策略选择

当厂商与零售商之间的关系由非合作过渡到协同合作时，合作的双方会以供应链系统的总体期望利润最大化为目标，共同来确定决策变量 a 和 q 的最优值。那么整个系统的期望利润为

$$\begin{aligned}\underset{a,n,z}{Max}\,E(\pi) &= \int_0^z \{py(a,n)u + ry(a,n)[z-u]\} f(u)du + \int_z^{+\infty} py(a,n)z - sy(a,n)[u-z] f(u)du \\ &\quad - cy(a,n)z - ea - gn \\ &= py(a,n)u + ry(a,n)\Lambda(z) - (p+s)y(a,n)\Theta(z) - cy(a,n)z - ea - gn \qquad (5.19)\end{aligned}$$

由于系统期望利润函数 E（π）是分别关于 z、a 和 q 的凹函数，所以存在最大值

$\partial E(\pi)/\partial z = 0$ 和 $\partial E(\pi)/\partial n = 0$ 以及 $\partial E(\pi)/\partial a = 0$

$$\bar{z}^* = F^{-1}(\bar{\varphi}) \text{，其中 } \bar{\varphi} = \frac{p-c+s}{p-r+s} \qquad (5.20)$$

$$\bar{n}^* = \left(\frac{a^{-\gamma}\beta\delta\bar{\Gamma}}{g}\right)^{\frac{1}{1+\delta}} \qquad (5.21)$$

$$\bar{a}^* = \left(\frac{n^{-\delta}\beta\gamma\bar{\Gamma}}{e}\right)^{\frac{1}{1+\gamma}} \qquad (5.22)$$

其中，$\bar{\Gamma} = pu - cF^{-1}(\bar{\varphi}) - p\Theta(F^{-1}(\bar{\varphi})) - s\Theta(F^{-1}(\bar{\varphi})) \quad + r\Lambda(F^{-1}(\bar{\varphi}))$。

将式(5.21)和式(5.22)联立求解，得到供应链系统最优的全国性广告水平和地方性广告水平各自为

$$\bar{n}^* = \left[\beta\left(\frac{e}{\gamma}\right)^{\gamma}\left(\frac{\delta}{g}\right)^{1+\gamma}\bar{\Gamma}\right]^{\frac{1}{1+\gamma+\delta}} \qquad (5.23)$$

$$\bar{a}^* = \left[\beta\left(\frac{g}{\delta}\right)^{\delta}\left(\frac{\gamma}{e}\right)^{1+\delta}\bar{\Gamma}\right]^{\frac{1}{1+\gamma+\delta}} \qquad (5.24)$$

故 Nash 合作博弈时的最优策略集合为

$$Y=\{(\overline{a}^*,\overline{n}^*,t,\overline{z}^*):0\le t\le 1\} \tag{5.25}$$

将式(5.20)、(5.23)和(5.24)代入式(5.4),得到协同合作博弈情形下的最优订货量为

$$\overline{q}^*=\left\{\alpha-\left[\beta\left(\frac{e}{\gamma}\right)^{\gamma}\left(\frac{g}{\delta}\right)^{\delta}\overline{\Gamma}^{-\gamma-\delta}\right]^{\frac{1}{1+\gamma+\delta}}\right\}F^{-1}(\overline{\varphi}) \tag{5.26}$$

最后再将式(5.17)、(5.20)和(5.21)代入式(5.16),可以获得 Nash 合作博弈结构下整条供应链的最优期望利润值为

$$E(\overline{\pi}^*)=\alpha\overline{\Gamma}-(1+\gamma+\delta)\left(\beta\left(\frac{e}{\gamma}\right)^{\gamma}\left(\frac{g}{\delta}\right)^{\delta}\overline{\Gamma}\right)^{\frac{1}{1+\gamma+\delta}} \tag{5.27}$$

五、小结

我们考察了由单一制造商与单一零售商所组成的两级供应链结构中的合作广告与产品配合问题。首先讨论了经典的制造商作为领导者而零售商作为跟随者的双寡头博弈情形,接着探讨了双方在 Nash 合作博弈情形下的最优行动策略选择。通过对两种博弈均衡结果的比较,研究发现,协同合作博弈均衡时的存货水平、全国性(或地方性)广告水平、订货数量、渠道成员各自利润以及系统总体利润均分别大于双寡头主从博弈时的对应值。推广到互补产品的广告合作和定价模式，由于互补品需求特性，其结果与单一产品十分相似。

二、文献评述

文献 1：量子博弈

第一次报告，我们组的题目是《量子博弈》。这是一篇发在物理学快报上的关于完全信息静态博弈的论文。

量子博弈是经典博弈理论的延续与发展。在经典博弈里，我们的策略是确定的，即确定选择某一个策略。但在这样的情况下，很多问题仍然没有比较好的解。比如著名的夫妻之间选择看球与看剧的难题，即使使用混合策略进行求解，得到的也只是一个以不同概率选择不同结果的解。而这解只是为了保证对手不知道你的选择倾向，从而不给对手提供优势；但是对于博弈的目标--提升自己的收益，并没有起到直接的作用，因为混合策略求解并不能保证获得胜利。

量子博弈拓展了博弈选手的策略选择空间，即除了经典博弈里的确定性策略选择和概略策略选择，引进了希尔伯特空间扩充策略选择空间。在夫妻博弈问题里，使用二维的希尔伯特空间即可。选手只需要利用互逆策略即可保证始终获胜（或获得最佳收益）。

量子博弈作为经典博弈的延伸，在动态博弈等问题上也取得了比经典博弈理论更好的结果，是一个不错的发展方向。

文献 2：互补商品最优定价与广告投入

第二次报告，我们组的题目是《互补商品最优定价与广告投入》。这是一篇关于博弈论前沿部分的论文。

这篇论文主要研究了制造商与销售商关于互补商品最优定价与广告投入问题。互补商品，比如电脑与鼠标，是一类互补作用很强的

商品，通常消费者会选择同时购买，或者同时不购买。所以制造商与销售商对于互补产品的定价与广告投入往往正相关，不能此高彼低，否则将都不能出售。而制造商与销售商之间则存在对于产品价格的博弈，与各自对产品广告投入的博弈。

此论文主要应用双寡头模型对制造商与销售商进行了博弈分析。论文中分别以制造商作为 leader、销售商作为 followeer 和销售商作为 leader、销售商作为 followeer 的情况进行了分析，得出制造商与销售商不同的最优定价与广告投入。

此论文的创新性在于突破传统的制造商与销售商对单一商品的博弈讨论，而是选择了一种更小，但却很常见的互补商品作为博弈对象。对象新颖，研究方法独特。