

# 小样本分位数检验统计量正态性修正系数选择

李淑彦

指导教师 王 星

中国人民大学统计学院 100872

**摘要:** 本文考虑小样本非参数分位数检验统计推断问题,当检验统计量满足独立随机变量和的形式时,通常采用修正正态近似作为抽样分布求整数点尾概率  $P$  值,这一思想普遍存在于非参数小样本假设检验和置信区间问题中。修正系数常常采用 0.5,但在样本量不大的情况下,本文分别考察了符号检验零假设所支持的二项分布和 Wilcoxon 符号秩检验下的 Wilcoxon 分布,通过对比整值点的尾概率  $P$  值的精确解和近似解,表明 0.5 的修正近似在一些值上并非最理想的近似,当统计量的抽样分布不对称时可能会产生很大误差,甚至会改变假设检验的结果。

**关键词:** 小样本 正态近似 修正系数  $P$  值

## 一、问题的提出

假设检验是统计推断的基本内容,检验统计量  $p$  值是拒绝零假设犯第 I 类错误的最小显著性水平。很多情况如非正态的总体假设下,求出统计量的精确分布并不容易,主要采用正态近似方法求出小样本统计量的近似  $p$  值, John.A.Rice<sup>[1994]</sup>。

正态近似是以中心极限定理为基础专门为独立随机变量和形式的统计量设计的近似求解统计量特征的方法。假定  $X_1, \dots, X_n$  独立同分布来自分布  $F(x)$ ,

我们将考察两类常用的非参数检验:符号检验零假设下所支持的二项分布和 Wilcoxon 符号秩检验下的 Wilcoxon 分布,分别比较不同样本量下的正态近似情况,比较经验修正系数 0.5 的近似修正效果。由此探究修正的必要与否的样本量条件和调整系数选择的位置依赖条件。论文共分为四个部分,第二部分借助 R 探讨修正的必要性;第三部分探讨近似的合理性问题,最后一部分,对修正系数的合理性判别与选择给出建议和结论。

大样本下 Wilcoxon 检验,吴喜之<sup>[1999]</sup>,王星<sup>[2005]</sup>指出对 Wilcoxon 统计量  $W^+ = \sum_{i=1}^n jW_j$ ,

采用正态近似,

$$\frac{W^+ - [n(n+1)/4]}{\sqrt{n(n+1)(2n+1)/24}} \sim N(0,1) \quad (1)$$

其中  $W_j$  表示  $X_{D_j}$  的符号,  $X_{D_j}$  表示  $|X_{(j)}|$  对应的原始样本。当样本量很大时, (1)式与用精确分布所得  $p$  值近似误差很小, 然而当样本量不大时, 则使用正态修正近似, 如公式(2)所示:

$$\frac{W^+ - [n(n+1)/4] \pm 0.5}{\sqrt{n(n+1)(2n+1)/24}} \sim N(0,1) \quad (2)$$

## 二、正态近似的合理性研究——修正的必要性

首先, 我们考察以二项分布为抽样分布的符号检验(sign test), 符号检验是检验给定一组数据的中位数与给定中位数  $M_0$  是否一致的检验。采用的统计量为  $K = \max\{S^+, S^-\}$ ,  $S^+, S^-$  为数据位于  $M_0$  左侧和位于  $M_0$  右侧数据量的个数。易知,  $K$  的精确分布为  $\text{binorm}(n, 0.5)$ 。如下分别在样本量为  $n=10, 20, 30, 50$  下, 在正整数点处正态修正的大小, 如图 1 所示:

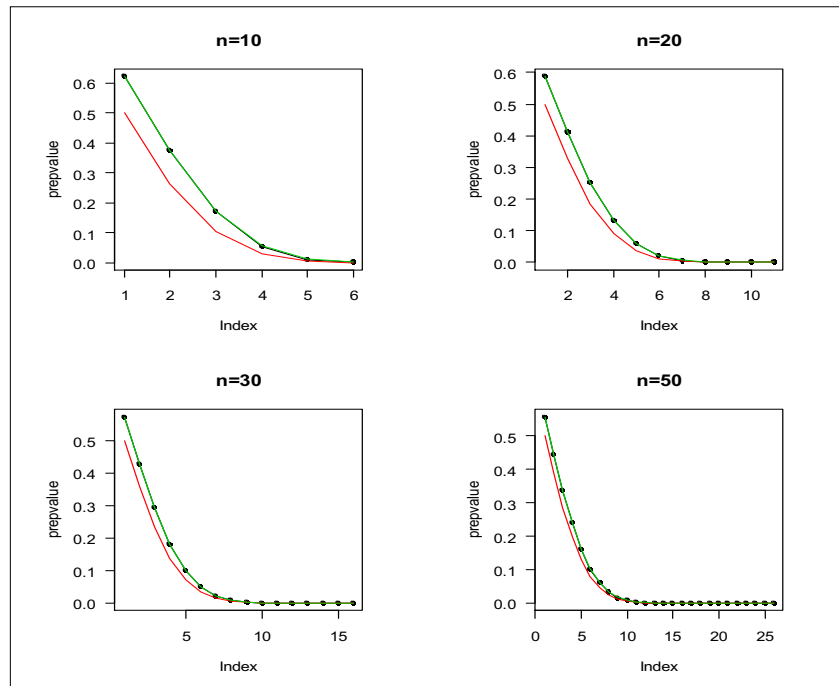


图 1: 不同整点值无修正下的正态近似尾概率  $P$  值(红), 精确  $P$  值(黑)和 0.5 修正系数下的近似  $P$  值(绿)。

从图中可以直观地看出, 随着样本量  $n$  的增大, 无修正正态近似越来越趋近于精确  $P$  值。但在  $n=30$  时, 从图中可以看到近似依然存在较大误差, 具体数值如表 1 所示:

表 1.  $n=30$  时某些正整数点无修正点值的尾概率  $P$  值, 精确  $P$  值和相对误差

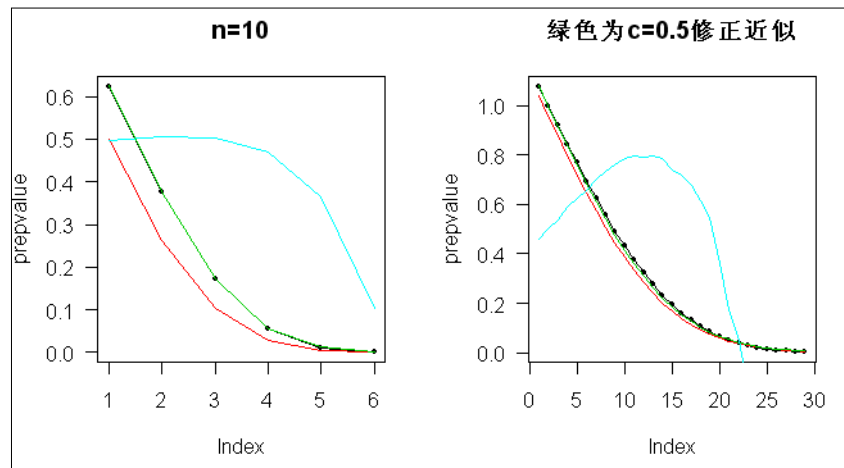
近似 $P$ 值	精确 $P$ 值	相对误差
0.500	0.572	12.6%
0.358	0.428	16.4%
0.233	0.292	20.4%
0.137	0.181	24.4%
0.072	0.100	28.1%

0.034	0.049	31.2%
0.014	0.021	33.5%
0.005	0.008	34.3%

从表 1 中，我们看出  $P$  值在 0.05 附近的相对误差明显较大，会对决策产生影响。这种情况在  $n=50$  的时候近似误差才在可接受的范围内。所以，在采用正态近似的时候，应该考虑样本量大小，对近似的合理性进行必要的修正。当然对于  $n$  小于 30 的情况，由以上实验结果，则认为修正是必要的。

### 三、正态近似的修正系数选择

在样本量  $n=10$  的情况下，我们分别采用符号检验中的  $qnorm(1-P-value)=[K - (\frac{n}{2} + c)] / \sqrt{n(n+1)(2n+1)/24}$  和符号秩检验中的  $\frac{W^+ - [n(n+1)/4 + c]}{\sqrt{n(n+1)(2n+1)/24}} = qnorm(1 - prevalue / 2)$  求得两个正态近似中需要的精确修正系数。如下图：



从图中的精确修正系数我们可以看出我们需要的修正细数值并不是总是 0.5，甚至很多时候和 0.5 根本没什么关系。符号检验的修正系数值随着精确  $P$  值的降低而减小；符号秩检验的修正系数值先从 0.4 增加到 0.8，后逐渐降低。所以，一味的按照直观感觉和经验，取修正系数为 0.5 有可能产生较大误差。如下是  $n=10$  下的符号秩检验：

精确 $P$ 值	$c=0.5$ 下的 $P$ 值	相对误差 ( $c=0.5$ )	需要的精确 $C$ 值	精确 $P$ 值	$c=0.5$ 下的 $P$ 值	相对误差 ( $c=0.5$ )	需要的精确 $C$ 值
1	1	0.00%	0.50	0.1602	0.1536	4.10%	0.72
0.9219	0.9188	0.30%	0.54	0.1309	0.1263	3.50%	0.68
0.8457	0.8385	0.90%	0.59	0.1055	0.1029	2.40%	0.62
0.7695	0.7598	1.30%	0.63	0.084	0.0831	1.00%	0.55
0.6953	0.6835	1.70%	0.66	0.0645	0.0665	3.20%	0.36
0.625	0.6103	2.40%	0.70	0.0488	0.0528	8.10%	0.17
0.5566	0.5408	2.80%	0.73	0.0371	0.0415	11.80%	0.05
0.4922	0.4755	3.40%	0.76	0.0273	0.0323	18.20%	-0.15

0.4316	0.4148	3.90%	0.78	0.0195	0.0249	27.70%	-0.41
0.375	0.359	4.30%	0.80	0.0137	0.0191	39.40%	-0.69
0.3223	0.3081	4.40%	0.79	0.0098	0.0144	47.80%	-0.85
0.2754	0.2622	4.80%	0.80	0.0059	0.0108	84.80%	-1.53
0.2324	0.2213	4.80%	0.78	0.0039	0.008	106.00%	-1.81
0.1934	0.1851	4.20%	0.74	0.002	0.0059	203.20%	-2.89

从表中可以看出在精确  $P$  值较小的地方，尤其是小于 0.05 后，误差很大，这将直接影响对检验结果的判断。

#### 四、结论与建议

通过上面对符号检验和符号秩检验的研究，我们可以得出如下结论：

1. 小样本下正态近似是必要的，否则误差会很大，对是否小样本的判断要谨慎，不能武断的说  $n$  大于 30 就是大样本，这由统计量的分布形态决定；
2. 修正系数选择的结论是：修正系数不应认为在 0.5 最好，事实上，它的精确值是变化的，可能大于 0.5 也可能小于 0.5，如果我们取系数为 0.5，则在统计量的分布不对称的时候会有很大的误差，甚至会改变假设检验的结果。

#### 五、主要参考文献：

- [1]吴喜之（1999），非参数统计，中国统计出版社。
- [2]王星（2005），非参数统计，北京，中国人民大学出版社。
- [3]李贤平（1996），非参数统计，上海，高等教育出版社。
- [4] John.A.Rice(1994), Mathematical Statistics and Data Analysis, 2nd edition, Duxbury Press。
- [5] Emmanuel Paradis(2005), R for Beginners, Institut des Sciences de l' Evolution  
Universit\_e Montpellier II F-34095 Montpellier c\_edex 05.France.